

N° d'Ordre : 7 (1974)

N° CNRS : AO 10 261

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

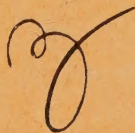
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean-Pierre CAMBOU

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1ère Thèse : CONTRIBUTION A L'ETUDE DES VIBRATIONS DES RESERVOIRS SPHERIQUES

2ème Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 20 septembre 1974 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. LAMEAU

M. RAVILLY

} Examineurs

N° d'Ordre : 7(1974)

N° CNRS : AO 10 261

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean-Pierre CAMBOU

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1ère Thèse : CONTRIBUTION A L'ETUDE DES VIBRATIONS DES RESERVOIRS SPHERIQUES

2ème Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 20 septembre 1974 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. LAMEAU

M. RAVILLY

} Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555015_0030

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. SPARSEL Pharmacie

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES -

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. PAUC	"
	M. PETRESCO	"
	M. RAFFIN	"
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. RAVILLY (ENSM)	"
	M. TARDY (ENSM)	"
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLLOUD	"
	M. COLLET	"
	M. MINN	"
	M. MEZENECV (ENSM)	"
	M. MOUTON	"
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	"
	M. MARTIN	"
	M. PIERI	"
	M. QUINIOU	"
	M. ROUXEL	"
	M. WOJTKOWIAK	"
	Melle DEBRAUX	Biologie
	M. GARRIGUES	"
	Mme LE DOUARIN	"
	M. LE DOUARIN	"
	M. SELLIER	"
	M. CAVET	Sciences de la Terre
Professeurs associés	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
Professeurs sans chaire	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. IBISCH	"
	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	M. LE NOUR	"
	Melle OFFRET (ENSM)	"
	M. ROSIER	"

Professeurs sans chaire M. GOBIN (ENSM)

Chimie

M. TOURNOUX

«

M. CHABANEL

Biologie

M. DUPONT

«

M. SAUDRAY

«

M. OTTMANN

Sciences de la Terre

Maîtres de Conférences M. DHOMBRES

Mathématiques

M. DO (ENSM)

«

M. GATESOUE

«

M. GAPAILLARD

«

M. LAMEAU (ENSM)

«

M. LEBORGNE

«

M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)

«

M. VOGEL

«

M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement ENSM) Mécanique

M. GUEVEL (ENSM)

«

M. SULMONT (ENSM)

«

M. VAUSSY (Chargé d'Enseignement ENSM)

«

M. VILAINE (ENSM)

«

M. CAILLER (IUT)

Physique

M. LE BIHAN

«

M. LE CORRE (IUT)

«

M. LE MAITRE

«

M. LONCKE

«

M. THOMAS (Chargé d'Enseignement IUT)

«

M. BOUCHY (IUT)

Chimie

M. LE MAITRE (Chargé d'Enseignement IUT)

«

Mme MARTIN

«

M. POINTEAU (ENSM)

«

M. AMOURIQ

Biologie

M. LEBRUN

«

Mme NICOLAS-PRATT

«

M. FORESTIER

Sciences de la Terre

M. NICOLAS

«

Secrétaire Général : M. LERAY

A mes parents,

A ma femme.

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique des Structures, dirigé par Monsieur le Professeur PIRONNEAU, à qui je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour m'avoir permis de mener à bien ce travail.

Je remercie Messieurs LAMEAU, RAVILLY, qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à ceux qui, à divers titres, m'ont aidé, en particulier, mes collègues MARTI et WIELGOSZ, et le personnel technique du Laboratoire, Monsieur BOLAN et GUILLE, ainsi que les personnes qui ont participé à la présentation de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
CHAPITRE I - HYPOTHESES DE CALCUL - EQUATIONS GENERALES	1
I-1 - Rappels de dynamique des milieux continus	1
I-2 - Préliminaires et conventions	2
I-3 - Relations contraintes déplacements	5
CHAPITRE II - RESOLUTION DE L'EQUATION DE L'ELASTICITE EN COORDONNEES SPHERIQUES	7
II-1 - Mise en équation	7
II-2 - Résolution de l'Equation de HELMOLTZ en coordonnées sphériques	10
II-3 - Séparation vectorielle de l'Equation de HELMOLTZ vectorielle en coordonnées sphériques	13
II-4 - Solution en coordonnées sphériques de l'Equation de l'Elasticité	14
II-4-1 - Etude du cas $n = 0$	15
II-4-2 - Cas général $n \gg 1$	17
II-5 - Conclusions	
CHAPITRE III - VIBRATIONS RADIALES	23
III-1 - Equation aux fréquences	23
III-2 - Cas de la membrane ($\epsilon = 0$)	28
III-3 - Isocontraintes nulles	31
III-4 - Construction Géométrique	37
III-5 - Conclusions	41
CHAPITRE IV - LES VIBRATIONS (R, θ, ϕ)	43
IV-1 - Analyse des vibrations (R, θ, ϕ)	43
IV-2 - Mise sous forme adimensionnelle	45
IV-3 - Résolution exacte : principe	47
IV-4 - Equation aux fréquences propres	49
IV-5 - $\delta(\rho, x)$ est mal dimensionné	54
IV-6 - Résultats	54
IV-7 - Fonctions propres	60
IV-8 - Cas de la membrane sphérique	67
IV-9 - Conclusions	80

CHAPITRE V - VIBRATIONS EQUIVOLUMIQUES	82
V-1 - Equation aux fréquences	82
V-2 - Cas de la membrane sphérique	84
V-3 - Cas de la coque (épaisseur faible)	87
V-4 - Isocontraintes nulles	88
V-5 - Constructions géométriques	91
V-6 - Résultats	91
V-7 - Conclusions	92
 CHAPITRE VI - RESULTATS EXPERIMENTAUX	 93
VI-1 - Le Montage	95
VI-2 - Etude de $\Sigma(a,b)$	95
VI-3 - Résultats Expérimentaux	
 CHAPITRE VII - CONCLUSIONS	 104
 CHAPITRE VIII - ANNEXE 1	 106
VIII-1 - Fonctions de BESSEL sphériques	107
VIII-2 - Les Fonctions de LEGENDRE	115
 CHAPITRE IX - ANNEXE II	
RESOLUTION DE L'EQUATION DE HELMOLTZ EN COORDONNEES	
SPHERIQUES	122
IX-1 - Rappels des formules de l'Analyse vectorielle	123
IX-2 - Résolution de l'Equation de HELMOLTZ vectorielle	
en coordonnées sphériques	124
 CHAPITRE X - BIBLIOGRAPHIE	 129

I N T R O D U C T I O N

Dans cet exposé, nous étudions les vibrations les plus générales de réservoirs sphériques épais ou minces (d'épaisseur constante h)

Un réservoir étudié, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , est supposé libre (la densité volumique de forces extérieures est nulle ainsi que la densité surfacique). Le matériau constituant le réservoir est supposé homogène, isotrope et élastique.

Une résolution vectorielle sans approximations mathématiques est développée à partir de l'équation de l'Elasticité.

NOTATIONS UTILISEES

a	rayon intérieur du réservoir
b	rayon extérieur du réservoir
ε	$\varepsilon = \frac{b - a}{b}$ coefficient d'épaisseur
h	$h = b - a$ épaisseur du réservoir
ρ	$\rho = \frac{a}{b}$
(r, θ, ϕ)	un système de coordonnées sphériques
α	$\alpha = \frac{\rho_1}{\lambda + 2G} \omega$
β	$\beta = \frac{\rho_1}{G} \omega$
γ	$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$
E	Module d'Young
$\overline{\mathbf{E}}$	Tenseur de déformation
η	$\eta = \beta r$
θ	Dilatation cubique
λ, G	Coefficients de LAME
$\rightarrow \nu$	Coefficient de POISSON
$\vec{\xi}$	Vecteur déplacement
ρ_1	Masse volumique
$\overline{\Sigma}$	Tenseur des contraintes
x	$x = \beta b$ coefficient de fréquence
ω	Pulsation propre du réservoir
$\overline{\Omega}$	Tenseur de rotation
$\vec{\Omega}$	Vecteur rotation
J_n, Y_n	Fonctions de Bessel
j_n, y_n	Fonctions de Bessel sphériques
P_n^m, Q_n^m	Fonctions de Legendre associées
m	indice modal ($0 \leq m \leq n$)
n	indice de vibration
k	indice nodal

I - Hypothèses de calcul - Equations Générales

I.1 - Rappels de dynamique des milieux continus

Les équations que nous rappelons ci-dessous sont valables pour tout système d'axes, orthonormé et direct.

Dans tout cet exposé, nous utiliserons les notations du Professeur MANDEL

a) Dans un milieu solide, homogène isotrope et élastique, soit $\vec{\xi}$ le vecteur de déplacement d'un point P

Un repère fixe est choisi

b) Les tenseurs déformation $\overline{\overline{E}}$ et rotation $\overline{\overline{\Omega}}$ sont donnés par les deux relations :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{\xi} + \widetilde{\text{grad } \vec{\xi}}) \quad (1-A)$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{\xi} - \widetilde{\text{grad } \vec{\xi}}) \quad (1-B)$$

$\widetilde{\text{grad } \vec{\xi}}$ est la matrice transposée de $\text{grad } \vec{\xi}$

Le vecteur rotation correspondant à $\overline{\overline{\Omega}}$ est $\vec{\Omega}$

c) Si $\overline{\overline{\Sigma}}_1$ est le tenseur des contraintes, le mouvement du point P est régi par l'équation vectorielle :

$$\text{div}_d \overline{\overline{\Sigma}}_1 + \rho_1 \vec{F} = \rho_1 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} \quad (1-C)$$

$$\text{avec } \overline{\overline{\Sigma}}_1 = \lambda \theta \overline{\overline{II}} + 2G \overline{\overline{E}} \quad (1-D)$$

$\overline{\overline{II}}$ est le tenseur unité

$\theta = \text{div } \vec{\xi}$ la dilatation cubique (θ est aussi égale à la trace de $\overline{\overline{E}}$)

λ et G sont les paramètres de LAME

ρ_1 la masse volumique

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ la dérivée seconde par rapport au temps de $\vec{\xi}$

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (E1)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (E2)$$

$$\frac{\lambda}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \quad (E3)$$

(1-E)

E est le module d'YOUNG du matériau et ν son coefficient de POISSON

Remarquons qu'on peut mettre (1-C) sous la forme :

$$(\lambda + 2G) \text{grad}(\text{div } \vec{\xi}) + 2G \text{rot } \vec{\omega}_1 + \rho_1 \vec{F} = \rho_1 \vec{\xi} \quad (1-F)$$

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\xi}$$

I.2 - Préliminaires et conventions

On utilisera un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .
L'origine sera le centre du réservoir sphérique (figure 1-A)

a) Soit $oxyz$ un trièdre fixe orthonormé direct de référence.
Un point P quelconque est défini par ses coordonnées x, y, z .

$$\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Les coordonnées x, y, z sont des fonctions de classe C^∞ de r, θ, ϕ .

$$d\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \phi} d\phi$$

Les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ du repère naturel sont définis par les relations suivantes :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial r} = h_r \vec{e}_r ; \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = h_\theta \vec{e}_\theta ; \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \phi} = h_\phi \vec{e}_\phi$$

où

$$h_r = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \right\| = 1 ; \quad h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \right\| = r ; \quad h_\phi = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \phi} \right\| = r \sin \theta$$

ce qui norme les vecteurs.

$$b) d\vec{e}_r = \vec{\Omega} dt \wedge \vec{e}_r ; \quad d\vec{e}_\theta = \vec{\Omega} dt \wedge \vec{e}_\theta ; \quad d\vec{e}_\phi = \vec{\Omega} dt \wedge \vec{e}_\phi$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} d\vec{e}_r \\ d\vec{e}_\theta \\ d\vec{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d\theta & \sin \theta d\phi \\ -d\theta & 0 & \cos \theta d\phi \\ -\sin \theta d\phi & -\cos \theta d\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{bmatrix} \quad (2-A)$$

c) $\vec{\xi}$ le vecteur déplacement se décompose sous la forme :

$$\vec{\xi} = u \vec{e}_r + v \vec{e}_\theta + w \vec{e}_\phi$$

$$\text{On sait que } \text{grad } \vec{\xi} = \xi_i \vec{e}_{i,j} \otimes \frac{1}{h_j} \vec{e}_j \quad (2-B)$$

On en déduit les composantes de $\text{grad } \vec{\xi}$

$$\text{grad } \vec{\xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} - w \sin \theta \right) \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w \cos \theta \right) \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \left(u \sin \theta + v \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \end{bmatrix} \quad (2-C)$$

En utilisant (1-A) et (1-B) on en déduit les tenseurs déformation et rotation notés de la façon suivante :

$$\vec{\vec{E}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{r\phi} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta\phi} \\ \epsilon_{\phi r} & \epsilon_{\phi\theta} & \epsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad \text{tenseur symétrique}$$

$$\vec{\vec{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tenseur antisymétrique}$$

$$\epsilon_{\theta r} = \epsilon_{r\theta} ; \quad \epsilon_{\phi r} = \epsilon_{r\phi} ; \quad \epsilon_{\phi\theta} = \epsilon_{\theta\phi}$$

Il y a donc $6 + 3 = 9$ coefficients à calculer

On trouve :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad D1$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad D2$$

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(u \sin \theta + v \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \quad D3$$

$$2 \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad D4$$

$$2 \epsilon_{r\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad D5 \quad (2-D)$$

$$2 \epsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \cotg \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad D6$$

$$2 \omega_1 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \cotg \theta \right) \quad D7$$

$$2 \omega_2 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \quad D8$$

$$2 \omega_3 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \quad D9$$

On en déduit l'expression de Θ la dilation cubique

$$\Theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{trace } (\overline{\overline{E}})$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \cotg \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (2-E)$$

I.3 - Relations contraintes-déplacements

I.3.1 - Si nous utilisons (2-D) et (1-D), le tenseur $\bar{\Sigma}_1$ des contraintes s'écrit très facilement.

La contrainte radiale, en particulier, a pour composantes:

$$\sigma_{rr} = \lambda \theta + 2 G \epsilon_{rr}$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 G \epsilon_{r\theta}$$

$$\sigma_{r\phi} = 2 G \epsilon_{r\phi}$$

θ est donné par (2-E)

On en déduit que :

$$\frac{\sigma_{rr}}{2 G} = \frac{1}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu \frac{u}{r} \right] + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \cotg \theta \right] + \frac{\partial}{1-2\nu} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \quad (A1)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2 G} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad A2 \quad (3-A)$$

$$\frac{\sigma_{r\phi}}{2 G} = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right] + \left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right] \quad A3$$

I.3.2 - Cas particuliers

a) Si u est uniquement fonction de r et si $v = w = 0$, les formules (3-A) se simplifient en :

$$\frac{\sigma_{rr}}{2 G} = \frac{1}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{du}{dr} + 2\nu \frac{u}{r} \right] \quad B1 \quad (3-B)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = 0 \quad B2$$

$$\text{Remarquons que } \theta = \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} \quad (3-C)$$

b) si $u \equiv 0$ et si v et w sont quelconques, les formules (3-A) se simplifient en :

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = \frac{v}{1-2v} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \cotg\theta \right] + \frac{v}{1-2v} \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \quad (D1)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2G} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad D2 \quad (3-D)$$

$$\frac{\sigma_{r\phi}}{2G} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \quad D3$$

II - Résolution de l'Equation de l'Elasticité en coordonnées sphériques

On utilise le même système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .
Un point P du réservoir a un déplacement de composantes u, v, w sur les vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$.

Dans ce chapitre, nous résolvons analytiquement l'équation de l'Elasticité.

II.1 - Mise en équation

Dans un milieu solide, homogène, isotrope et élastique, le vecteur déplacement $\vec{\xi}$ satisfait à l'équation (I.1.F) de l'Elasticité.

$$(\lambda + 2 G) \text{grad} (\text{div} \vec{\xi}) + 2 G \text{rôt} \vec{\omega}_1 + \rho_1 \vec{F} = \rho_1 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \quad (1-A)$$

où :

- a) λ et G sont les paramètres de LAME (I.1.E.)
- b) $\vec{\omega}_1 = -\frac{1}{2} \text{rôt} \vec{\xi}$
- c) $\vec{F}$ est la densité volumique de forces extérieures
- d) ρ_1 est la masse volumique

D'après (9), le déplacement $\vec{\xi}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\xi} = \text{grad} k + \text{rôt} \vec{h} \quad B1$$

(1-B)

$$\text{div} \vec{h} = 0 \quad B2$$

k est une fonction scalaire de r, θ, φ et du temps t

$\vec{h}$ est une fonction vectorielle de r, θ, φ et du temps t

$$\underline{\text{II.1.1}} - \quad \Theta = \text{div} \vec{\xi}$$

$$\text{D'après (1-B)} : \quad \Theta = \text{div} (\text{grad} k + \text{rôt} \vec{h}) = \text{div} (\text{grad} k) + \text{div} (\text{rôt} \vec{h})$$

$$\text{div} (\text{rôt} \vec{h}) = 0 \quad \text{div} (\text{grad} k) = \Delta k \text{ (Laplacien de } k)$$

$$\text{d'où} \quad \Theta = \Delta k$$

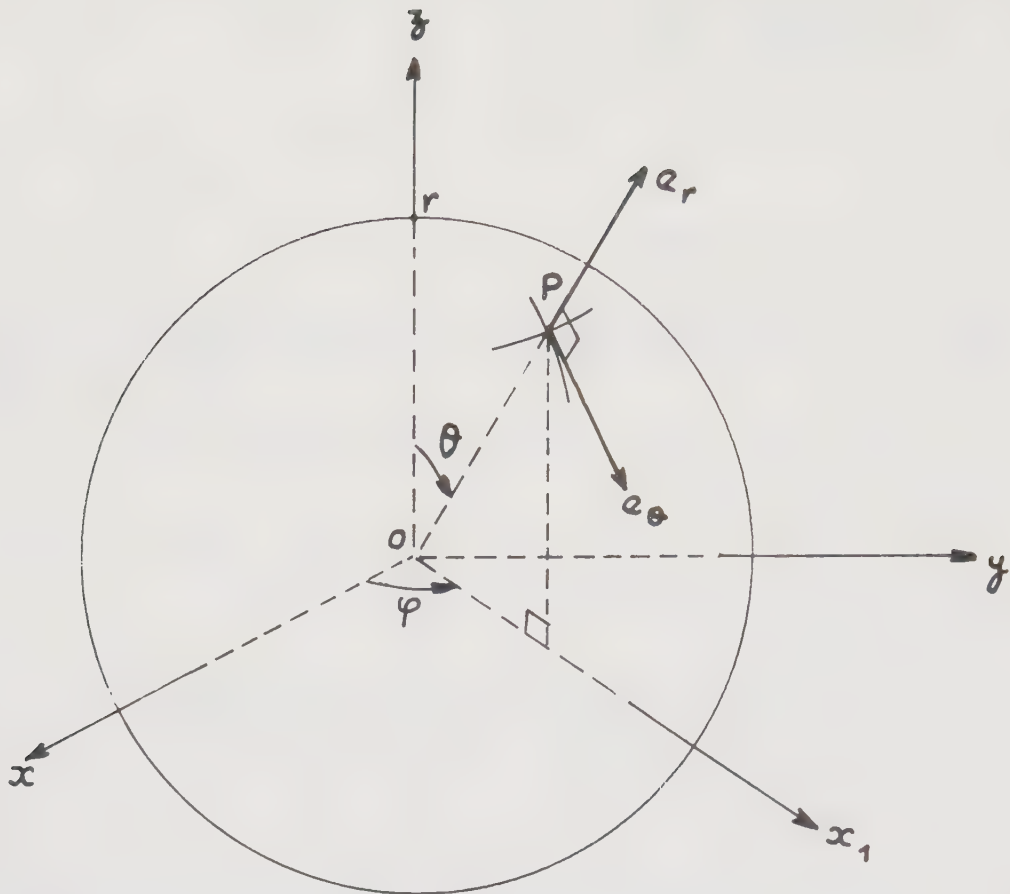


figure II (1-A)

Le point P du réservoir sphérique est repéré par ses coordonnées sphériques :

a) $\vec{\phi} = (\vec{ox}, \vec{ox}_1)$

b) $OP = r$ ($a \leq r \leq b$, a rayon intérieur, b rayon extérieur)

c) $(\vec{oz}, \vec{e}_r) = \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} ; \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} ; \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{p}}{\partial \phi}$$

(1-C)

II.1.2. - Calcul de $\vec{\omega}_1$

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{1}{2} \vec{rot} \vec{\xi} = -\frac{1}{2} \vec{rot} (\vec{grad} k + \vec{rot} \vec{h}) = -\frac{1}{2} \vec{rot} (\vec{grad} k) - \frac{1}{2} \vec{rot} (\vec{rot} \vec{h})$$

Le rotationnel d'un gradient est nul. En utilisant la formule d'analyse vectorielle et (1-B2) :

$$\vec{rot} (\vec{rot} \vec{h}) = \vec{grad} (\text{div} \vec{h}) - \vec{\Delta} \vec{h} = -\vec{\Delta} \vec{h}$$

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \vec{\Delta} \vec{h} \quad (1-D)$$

$\vec{\Delta}$ est le Laplacien vecteur

II.1.3 - Séparation

On suppose que le réservoir sphérique est libre. Il n'est soumis à aucune force extérieure ($\vec{F} \equiv 0$)

Si nous remplaçons θ et $\vec{\omega}_1$ par leurs valeurs dans (1-A), nous obtenons :

$$(\lambda + 2 G) \vec{grad} \Delta k + G \vec{rot} (\vec{\Delta} \vec{h}) = \rho_1 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{grad} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \vec{rot} \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2}$$

ce qui entraîne :

$$\vec{grad} \left[(\lambda + 2 G) \Delta k - \rho_1 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \right] + \vec{rot} \left[G \vec{\Delta} \vec{h} - \rho_1 \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} \right] = 0$$

On obtient le système suivant :

$(\lambda + 2 G) \Delta k - \rho_1 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} = 0 \quad E1$	(1-E)
$G \vec{\Delta} \vec{h} - \rho_1 \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad E2$	

II.1.4 - Régime harmonique

En régime harmonique on peut chercher k , $\vec{h}$ et $\vec{\xi}$ sous la forme :

$$k = K e^{j\omega t} \quad F1$$

$$\vec{h} = \vec{H} e^{j\omega t} \quad F2$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi} e^{j\omega t} \quad F3$$

(1-F)

Les fonctions $K, \vec{H}, \vec{\xi}$ sont des fonctions de r, θ, ϕ

Si nous reportons dans (1-E) :

$$\Delta K + \alpha^2 K = 0 \quad G1$$

$$\vec{\Delta} H + \beta^2 \vec{H} = \vec{0} \quad G2 \quad (1-G)$$

$$\alpha^2 = \frac{\rho_1 \omega^2}{\lambda + 2G} \quad G3$$

$$\beta^2 = \frac{\rho_1 \omega^2}{G} \quad G4$$

On a aussi séparé l'équation de l'élasticité en deux équations (1-G1) et (1-G2)

Les inconnues sont les fonctions K et $\vec{H}$ ainsi que la pulsation ω

Le rapport $\gamma^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ vaut $\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$. Il ne dépend que du coefficient de POISSON du matériau

$$\boxed{\gamma^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \quad (1-H)$$

Dans le cas $\nu = 0,3$ (aciers usuels) :

$$\gamma^2 = \frac{2}{7} \Rightarrow \gamma = 0,53$$

Remarquons que α et β sont homogènes à des m^{-1} . On constate que K satisfait à une équation de HELMOLTZ scalaire alors que $\vec{H}$ satisfait à une équation de HELMOLTZ vectorielle.

II.2 - Résolution de l'équation de Helmolz scalaire en coordonnées sphériques

II.2.1 - Soit l'équation scalaire :

$$\Delta X + \eta^2 X = 0 \quad \text{avec } X = X(r, \theta, \phi) \quad (2-A)$$

η est un réel quelconque

On cherche une solution à variables séparables :

$$X = X_r(r) \cdot X_\theta(\theta) \cdot X_\phi(\phi) \quad \text{en coordonnées sphériques.}$$

Le Laplacien en coordonnées sphériques est donné par :

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

L'équation (2-A) se met sous la forme :

$$\underbrace{\frac{1}{x_r} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dx_r}{dr} \right]}_{\text{fonction de } r} + \underbrace{\eta^2 r^2 + \frac{1}{x_\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dx_\theta}{d\theta} \right] + \frac{1}{x_\phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 x_\phi}{d\phi^2}}_{\text{fonction de } \theta \text{ et de } \phi} = 0$$

II.2.2 -

Les deux fonctions précédentes sont des constantes .

Posons :

$$a) \frac{1}{x_r} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dx_r}{dr} \right] + \eta^2 r^2 = \ell(\ell + 1)$$

On peut supposer $\ell \geq 0$ car un changement de ℓ en $-(\ell + 1)$ donne la même équation.

$$b) \frac{1}{x_\phi} \frac{d^2 x_\phi}{d\phi^2} = -m^2$$

$$c) \frac{1}{x_\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dx_\theta}{d\theta} \right] = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \ell(\ell + 1)$$

II.2.3. -

Si on considère l'équation aux valeurs propres λ :

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dx_r}{dr} \right] + (\eta^2 r^2 - \lambda) x_r = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_n = n(n+1)$ ou n entier positif ou nul. Une fonction quelconque (au moins de carré sommable) se développe sur les fonctions propres correspondantes.

On peut donc supposer $l = n =$ entier positif ou nul

II.2.4. -

$$\frac{d^2 x_\phi}{d\phi^2} + m^2 x_\phi = 0 \Rightarrow x_\phi = A \cos m \phi + B \sin m \phi$$

m doit être entier pour qu'en changeant ϕ en $\phi + 2\pi$ on obtienne la même valeur de X .

II.2.5 -

La solution générale à variables séparables de l'équation de Helmholtz scalaire est donc :

$$X = X_r(r) X_\theta(\theta) X_\phi(\phi)$$

où

$$a) X_r = A_n j_n(\eta r) + B_n y_n(\eta r) \quad B1$$

j_n et y_n fonctions de Bessel sphériques d'ordre demi-entier

$$b) X_\phi = C_1 \cos m\phi + C_2 \sin m\phi \quad B2 \quad (2-B)$$

$$c) X_\theta = C_3 P_n^m(\cos \theta) + C_4 Q_n^m(\cos \theta) \quad B3$$

avec $m \leq n$

$P_n^m(\cos \theta)$ est fonction de Legendre associée de 1ère espèce

$Q_n^m(\cos \theta)$ est fonction de Legendre associée de 2ème espèce

Aux pôles, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $Q_n^m(\cos \theta)$ est infini donc $C_2 \equiv 0$

$$X_\theta = C_3 P_n^m(\cos \theta)$$

L'indice m s'appelle l'indice modal. Il est inférieur ou égal à l'indice de vibration n .

L'annexe I donne un résumé des propriétés des fonctions de Bessel sphériques et des fonctions de Legendre.

II.3 - Séparation vectorielle de l'équation de Helmholtz vectorielle en coordonnées sphériques.

Théorème

Si Φ, ψ, χ sont trois solutions de l'équation de Helmholtz scalaire :

$$\Delta \Phi + \beta^2 \Phi = 0 \quad A1$$

$$\Delta \psi + \beta^2 \psi = 0 \quad A2 \quad (3-A)$$

$$\Delta \chi + \beta^2 \chi = 0 \quad A3$$

La solution générale de l'équation vectorielle :

$$\vec{\Delta} \vec{H} + \beta^2 \vec{H} = \vec{0} \quad \text{est}$$

$$\vec{H} = a' \text{grad } \Phi + b' \vec{M} + c' \vec{N} \quad (3-B)$$

où

a) a', b', c' sont des constantes arbitraires.

$$b) \vec{M} = \text{rot} (r \psi \vec{e}_r) = \left[\text{grad} (r \psi) \wedge \vec{e}_r \right]$$

$$c) \vec{N} = \frac{1}{\beta} \text{rot} \text{rot} (r \chi \vec{e}_r)$$

$\vec{H}$ est aussi décomposé sous la forme d'un gradient $\vec{L} = \text{grad } \Phi$ et d'un rotationnel $b' \vec{M} + c' \vec{N}$

On a aussi séparé l'équation de Helmholtz. La solution générale dépend de trois potentiels scalaires.

Les trois vecteurs $\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}$ sont des solutions indépendantes de l'équation vectorielle.

Si on prend $\chi = \psi$, les vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux et on a alors :

$$\text{rot } \vec{M} = \beta \vec{N} \quad C1$$

$$\text{rot } \vec{N} = \beta \vec{M} \quad C2 \quad (3-C)$$

Ces résultats sont obtenus par (9) En annexe II, la démonstration de cette décomposition est donnée

II.4 - Solution en coordonnées sphériques de l'Equation de l'Elasticité

$$\vec{\xi} = a_1 \text{grad } K + \text{rot } \vec{H}$$

d'après (3-B) :

$$\vec{K} = a' \text{grad } \Phi + b' \vec{M} + c' \vec{N}$$

$$\text{rot } \vec{H} = a' \text{rot } (\text{grad } \Phi) + b' \text{rot } \vec{M} + c' \text{rot } \vec{N}$$

$$\text{rot } (\text{grad } \Phi) = \vec{0}$$

$$\text{rot } \vec{N} = \beta \vec{M} ; \quad \text{rot } \vec{M} = \beta \vec{N}$$

d'où :

$$\vec{\xi} = a_1 \text{grad } K + a_2 \vec{M} + a_3 \vec{N} \quad A1$$

$$\Delta \psi + \beta^2 \psi = 0 \quad A2$$

(4-A)

$$\vec{M} = \text{rot } (r \psi \vec{e}_r) \quad A3$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\beta} \text{rot } \vec{M} \quad A4$$

$$\Delta K + \alpha^2 K = 0 \quad A5$$

Il reste à évaluer pour chaque valeur de l'indice de vibration n , la forme des différents vecteurs $\text{grad } K$, $\vec{M}$, $\vec{N}$

Lorsque $n = 0$, comme $m \leq n$, alors $m = 0$. Les fonctions K et ψ ne sont que des fonctions de r et le calcul des vecteurs précédents est élémentaire.

II.4.1 - Etude du cas $n = 0$

a) Prenons : $K = R_0(r) = A_{1,0} j_0(\alpha r) + B_{1,0} y_0(\alpha r)$

$$\psi = S_0(r) = A_{2,0} j_0(\beta r) + B_{2,0} y_0(\beta r) \quad (4-B)$$

$$\vec{L} = \text{grad } \psi = \frac{dS_0}{dr} \vec{e}_r ; \quad \text{grad } K = \frac{dR_0}{dr} \vec{e}_r$$

$$\vec{M} = r (\vec{L} \wedge \vec{e}_r) = \vec{0}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\beta} \text{rot } \vec{M} = \vec{0}$$

Le déplacement a pour composantes :

$$u = a_1 \frac{dR_0}{dr} = a_1 \left[A_{1,0} \frac{dj_0}{dr}(\alpha r) + B_{1,0} \frac{dy_0}{dr}(\alpha r) \right]$$

$$v = 0$$

(4-C)

$$w = 0$$

Le déplacement est purement radial

b) D'après (I-3-B), la contrainte radiale a pour composantes :

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = \frac{1}{1-2\nu} \left[\text{div } \vec{\xi} + \frac{du}{dr} \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = 0$$

$$\vec{\xi} = a_1 \text{grad } K \Rightarrow \text{div } \vec{\xi} = a_1 \Delta K = -a_1 \alpha^2 K$$

En utilisant (4-C)

$$\frac{\sigma_{rr}}{2G} = a_1 \left(\frac{d^2 R_0}{dr^2} - \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha^2 R_0 \right) \quad (4-D)$$

$$\sigma_{LG} = \sigma_{r\phi} = 0$$

$$R_C = A_{1,0} j_0(\alpha r) + B_{1,0} Y_0(\alpha r)$$

La contrainte est purement radiale

II.4 2 - Cas général $n \geq 1$

Preons K et ψ sous forme complexe $\bar{K}$ et $\bar{\psi}$ avec :

$$\bar{K} = \bar{k}_n S_n(r) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi} ; R_n(r) = A_{1,n} j_n(\alpha r) + B_{1,n} y_n(\alpha r) \quad (4-F)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_n S_n(r) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi} ; S_n(r) = A_{2,n} j_n(\beta r) + B_{2,n} y_n(\beta r)$$

$$k_n = k_{n1} + j k_{n2} ; \bar{\psi}_n = \psi_{n1} + j \psi_{n2}$$

Nous obtenons :

$$a) \vec{\text{grad}} \bar{K} = \bar{k}_n \left(\frac{dR}{dr} P_n^m(\cos \theta) \vec{e}_r + \frac{R}{r} \frac{dP_n^m}{d\theta}(\cos \theta) \vec{e}_\theta + jm \frac{R}{r} \frac{P_n^m}{\sin \theta} \vec{e}_\phi \right) e^{jm\phi}$$

$$b) \vec{L} = \vec{r} \times \vec{\text{grad}} \bar{\psi} = \bar{\psi}_n \left(\frac{dS}{dr} P_n^m(\cos \theta) \vec{e}_r + \frac{R}{r} \frac{dP_n^m}{d\theta}(\cos \theta) \vec{e}_\theta + jm \frac{R}{r} \frac{P_n^m}{\sin \theta} \vec{e}_\phi \right) e^{jm\phi}$$

$$c) \vec{M} = r(\vec{L} \wedge \vec{e}_r) = \bar{\psi}_n S_n(r) \left(jm \frac{P_n^m}{\sin \theta} \vec{e}_\theta - \frac{dP_n^m}{d\theta} \vec{e}_\phi \right) e^{jm\phi}$$

$$\vec{M} = M_\theta \vec{e}_\theta + M_\phi \vec{e}_\phi$$

$$d) \vec{N} = \frac{1}{\beta} \text{rot} \vec{M} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta M_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r M_\theta) \right] \vec{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (M_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta M_\phi) \right] \vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r M_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (M_r) \right]$$

d'où :

$$\vec{N} = \bar{\psi}_n \left[\frac{S_n(r)}{\beta r} P_n^m \vec{e}_r + \frac{1}{\beta r} \frac{d}{dr} (r S_n) \frac{dP_n^m}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{jm}{\beta r} \frac{d}{dr} (r S_n) \frac{P_n^m}{\sin \theta} \vec{e}_\phi \right] e^{jm\phi}$$

e) expression du déplacement $\vec{\xi}$

$$\text{Le déplacement } \vec{\xi} = a_1 \vec{\text{grad}} \bar{K} + a_2 \vec{M} + a_3 \vec{N}$$

a pour composantes :

$$\bar{u} = \bar{Z}_1(r) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi} \quad \text{G1}$$

$$\bar{v} = (\bar{Z}_2(r) \frac{dP_n^m}{d\theta} + \bar{Z}_3(r) \frac{P_n^m}{\sin\theta}) e^{jm\phi} \quad \text{G2} \quad (4-G)$$

$$\bar{w} = (\bar{Z}_4(r) \frac{dP_n^m}{d\theta} + \bar{Z}_5(r) \frac{P_n^m}{\sin\theta}) e^{jm\phi} \quad \text{G3}$$

avec :

$$\bar{Z}_1(r) = a_1 \bar{k}_n \frac{dR_n}{dr} + n(n+1) a_3 \bar{\psi}_n \frac{S_n}{\beta r}$$

$$\bar{Z}_2(r) = a_1 \bar{k}_n \frac{R_n}{r} + a_3 \frac{\bar{\psi}_n}{\beta r} \frac{d}{dr} (r S_n)$$

$$\bar{Z}_3(r) = j a_2 m \bar{\psi}_n S_n$$

$$\bar{Z}_4(r) = -a_2 \bar{\psi}_n S_n \Rightarrow -jm \bar{Z}_4 = \bar{Z}_3(r)$$

$$\bar{Z}_5(r) = jm \left\{ a_1 \bar{k}_n \frac{R_n}{r} + a_3 \frac{\bar{\psi}_n}{\beta r} \frac{d}{dr} (r S_n) \right\} = jm \bar{Z}_2(r)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \\ 0 & j \frac{\bar{Z}_3}{m} & j m \bar{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n^m \\ \frac{dP_n^m}{d\theta} \\ \frac{P_n^m}{\sin\theta} \end{bmatrix} e^{jm\phi}$$

f) Calcul de la contrainte radiale

La contrainte radiale $\bar{\sigma}_r$ de composante $\bar{\sigma}_{rr}$, $\bar{\sigma}_{r\theta}$, $\bar{\sigma}_{r\phi}$ est telle que :

$$\bar{\sigma}_{rr} = \lambda \bar{\theta} + 2 G \bar{\epsilon}_{rr} \quad ; \quad \bar{\epsilon}_{rr} = \frac{d\bar{u}}{dr}$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta} = 2 G \bar{\epsilon}_{r\theta} \quad ; \quad \bar{\epsilon}_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}$$

$$\bar{\sigma}_{r\phi} = 2 G \bar{\epsilon}_{r\phi} \quad ; \quad \bar{\epsilon}_{r\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{w}}{r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r}$$

En tenant compte de la relation $\frac{\lambda}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu}$ (I.1.E3) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{2\mu} \\ \frac{\bar{\sigma}_{r\theta}}{\mu} \\ \frac{\bar{\sigma}_{r\phi}}{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{y}_2(r) & \bar{y}_3(r) \\ 0 & \frac{j\bar{y}_3(r)}{m} & jm\bar{y}_2(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n^m \\ \frac{dP_n^m}{d\theta} \\ \frac{P_n^m}{\sin \theta} \end{bmatrix} e^{jm\phi} \quad (4-H)$$

avec :

$$\bar{y}_1(r) = \frac{d\bar{z}_1}{dr} - a_1 \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha^2 \bar{k}_n R_n = a_1 \bar{k}_n \left(\frac{d^2 R_n}{dr^2} - \frac{\nu \alpha^2 R_n}{1-2\nu} \right) + a_3 n(n+1) \bar{\psi}_n \frac{d}{dr} S_n$$

$$\bar{y}_2(r) = \frac{d\bar{z}_2}{dr} + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{r}$$

$$\bar{y}_3(r) = \frac{d\bar{z}_3}{dr} - \frac{\bar{z}_3}{r}$$

g) Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour le réservoir sphérique sont
 $\vec{\Phi}_r \equiv 0$ pour $r = a$ et $r = b$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de $\vec{\Phi}_r$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \text{Re } \bar{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re } \bar{Y}_2 & \text{Re } \bar{Y}_3 \\ 0 & \frac{-I \bar{Y}_3}{m} & -mI \bar{Y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n^m \\ \frac{dP_n^m}{d\theta} \\ \frac{P_n^m}{\sin\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \theta \quad (4-I)$$

$$\begin{bmatrix} I \bar{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & I \bar{Y}_2 & I \bar{Y}_3 \\ 0 & \frac{\text{Re } \bar{Y}_3}{m} & m \text{Re } Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n^m \\ \frac{dP_n^m}{d\theta} \\ \frac{P_n^m}{\sin\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \theta$$

Les zéros de P_n^m et de $\frac{dP_n^m}{d\theta}$ sont simples et d'autre part, il n'existe pas de relation linéaire à coefficients indépendants de θ entre P_n^m , $\frac{dP_n^m}{d\theta}$, $\frac{P_n^m}{\sin\theta}$; Les deux matrices précédentes ont donc leurs coefficients nuls.

Ceci implique douze relations :

$$\text{Re } \bar{Y}_i = I \bar{Y}_i = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } r = a \text{ et } r = b$$

et un système linéaire de douze équations aux douze inconnues

$$\begin{matrix} A_{ni} & A_{n2} & A_{ni} \\ a_1 k_{ni} & ; a_2 \psi_{ni} & ; a_3 \psi_{ni} \end{matrix} \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

$$\begin{matrix} B_{ni} & B_{n2} & B_{ni} \end{matrix}$$

Si nous exprimons les $\overline{Y}_i(r)$ en fonction de R_n et S_n , on obtient :

$$\overline{Y}_1(r) = a_1 \overline{k}_n \left[\frac{d^2 R_n}{dr^2} - \frac{\nu \alpha^2 R_n}{1 - 2\nu} \right] + a_3 n(n+1) \overline{\psi}_n \frac{dS_n}{dr}$$

$$\begin{aligned} \overline{Y}_2(r) = a_1 \overline{k}_n \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{R_n}{r} \right] + \frac{\frac{dR_n}{dr} - \frac{R_n}{r}}{r} \right] + a_3 \overline{\psi}_n \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\beta r} \frac{d}{dr} (rS_n) \right] \right. \\ \left. + \frac{n(n+1)}{\beta r^2} \left(S_n - \frac{d}{dr} (rS_n) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\overline{Y}_3(r) = j a_2 m \overline{\psi}_n \left(\frac{dS_n}{dr} - \frac{S_n}{r} \right)$$

$$\text{d'où: } \frac{\psi_{n,1}}{k_{n,1}} = \frac{\psi_{n2}}{k_{n2}} \quad \text{Re } \overline{Y}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{I } \overline{Y}_i = 0$$

Il n'y a pas de déphasage entre K et ψ .

Il reste un système linéaire de six équations :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 A_{1,n} \\ a_1 B_{1,n} \\ a_3 A_{2,n} \\ a_3 B_{2,n} \end{bmatrix} \quad (R \oplus \Phi)$$

$$\begin{bmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 A_{2,n} \\ a_2 B_{2,n} \end{bmatrix} \quad (\Theta \oplus \Phi)$$

aux six inconnues $a_1 A_{1,n}$; $a_1 B_{1,n}$; $a_3 A_{2,n}$; $a_3 B_{2,n}$; $a_2 A_{2,n}$; $a_2 B_{2,n}$

qui se sépare en deux systèmes linéaires $(R \ \Theta \ \Phi)$ et $(\Theta \ \Phi)$

Par la suite, on remplacera $a_1 A_{1,n}$; $a_1 B_{1,n}$; $a_3 A_{2,n}$; $a_3 B_{2,n}$ par W_1 , W_2 , W_3 , W_4 dans le chapitre (IV)

et $a_2 A_{2,n}$ et $a_2 B_{2,n}$ par W_1 et W_2 dans le chapitre (V)

II-5 - CONCLUSIONS

Il existe pour un réservoir sphérique libre (de rayon intérieur a et de rayon extérieur b) trois types de vibrations :

- a) des vibrations radiales ($v = w = 0$)
- b) des vibrations dans les trois directions $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ (les plus générales).
- c) des vibrations équivolumiques ($u = 0$)

Les conditions aux limites du réservoir libre (contrainte radiale nulle pour $r = 0$ et $r = b$) permettent d'écrire des systèmes linéaires et homogènes d'ordre 2 (vibrations radiales ou vibrations équivolumiques) et d'ordre 4 (vibrations couplées en R, Θ, Φ). Il reste à déterminer les équations aux fréquences de ces trois types de vibration.

L'équation sera obtenue en écrivant que le déterminant du système homogène associé est nul.

III - Vibrations radiales

III.1 - Equation aux fréquences

III.1.1 - Déplacements

On obtient des vibrations radiales pour un indice de vibrations nul.

L'équation (II.4.C) donne le déplacement $\vec{\xi}$ sous la forme :

$$u = W_1 \frac{dj_o}{dr} (\alpha r) + W_2 \frac{dy_o}{dr} (\alpha r)$$

$$(W_1 = a_1 A_{10} ; W_2 = a_1 B_{10})$$

$$v = w = 0$$

$$\text{Spécial } \alpha = \alpha r$$

$$\frac{dj_o(\eta)}{d\eta} = -j_1(\eta) = \frac{\cos\eta}{\eta} - \frac{\sin\eta}{\eta^2}$$

$$\frac{dy_o(\eta)}{d\eta} = -y_1(\eta) = \frac{\cos\eta}{\eta^2} + \frac{\sin\eta}{\eta}$$

d'où :

$$u(\eta) = -\alpha \left[W_1 \left(\frac{\sin\eta}{\eta^2} - \frac{\cos\eta}{\eta} \right) + W_2 \left(-\frac{\cos\eta}{\eta^2} - \frac{\sin\eta}{\eta} \right) \right] \quad (1-A)$$

III.1.2 - Contraintes

L'équation (II.4-D) fournit l'unique composante σ_{rr} de la contrainte radiale :

$$\sigma_{rr} = W_1 \left(\frac{d^2 j_o(\eta)}{d\eta^2} - \frac{\nu}{1-2\nu} j_o(\eta) \right) + W_2 \left(\frac{d^2 y_o(\eta)}{d\eta^2} - \frac{\nu}{1-2\nu} y_o(\eta) \right) \quad (1-B)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = 0$$

Les isocontraintes sont des sphères.

III.1.3 - Equation aux fréquences

Les conditions aux limites sont :

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ pour } r = a \text{ et } r = b$$

Nous obtenons un système linéaire et homogène aux inconnues W_1 et W_2

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 j_0(\alpha b)}{dr^2} - \frac{v \alpha^2}{1 - 2v} j_0(\alpha b) & \frac{d^2 y_0(\alpha b)}{dr^2} - \frac{v \alpha^2}{1 - 2v} y_0(\alpha b) \\ \frac{d^2 j_0(\alpha a)}{dr^2} - \frac{v \alpha^2}{1 - 2v} j_0(\alpha a) & \frac{d^2 y_0(\alpha a)}{dr^2} - \frac{v \alpha^2}{1 - 2v} y_0(\alpha a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = 0$$

Ce système est du type $C \vec{W} = \vec{0}$

Si on effectue les opérations élémentaires suivantes sur C :

- a) Multiplication de la première ligne par $\frac{b^2}{4}$
- b) Multiplication de la deuxième ligne par $\frac{a^2}{4}$

on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ C_1(\rho x) & C_2(\rho x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = 0 \quad C1$$

où :

$$a) \quad C_1(x) = - \frac{x^2}{2} j_0(\gamma x) + 2 \gamma x j_1(\gamma x) \quad C2$$

$$b) \quad C_2(x) = - \frac{x^2}{2} Y_0(\gamma x) + 2 \gamma x Y_1(\gamma x) \quad C3$$

$$c) \quad x = \beta b \quad C4$$

$$d) \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} \quad C5 \quad (1-C)$$

$$e) \quad \rho = \frac{a}{b} \quad C6$$

β est homogène à des m^{-1} , donc $x = \beta b$ est sans dimension.

x est la fréquence adimensionnelle du réservoir. En effet, si on tient compte de (I.G-4), pour une pulsation ω , la fréquence correspondante est :

$$f = \frac{x}{2\pi b} \sqrt{\frac{G}{\rho_1}}$$

Pour un matériau donné, $f = K_1 \frac{x}{b}$ avec $K_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G}{\rho_1}}$

Si $\nu = 0,3$, $K_1 = 499,8 \approx 500 \Rightarrow f = \frac{500 x}{b}$ Hertz

γ est sans dimension et ne dépend que de ν

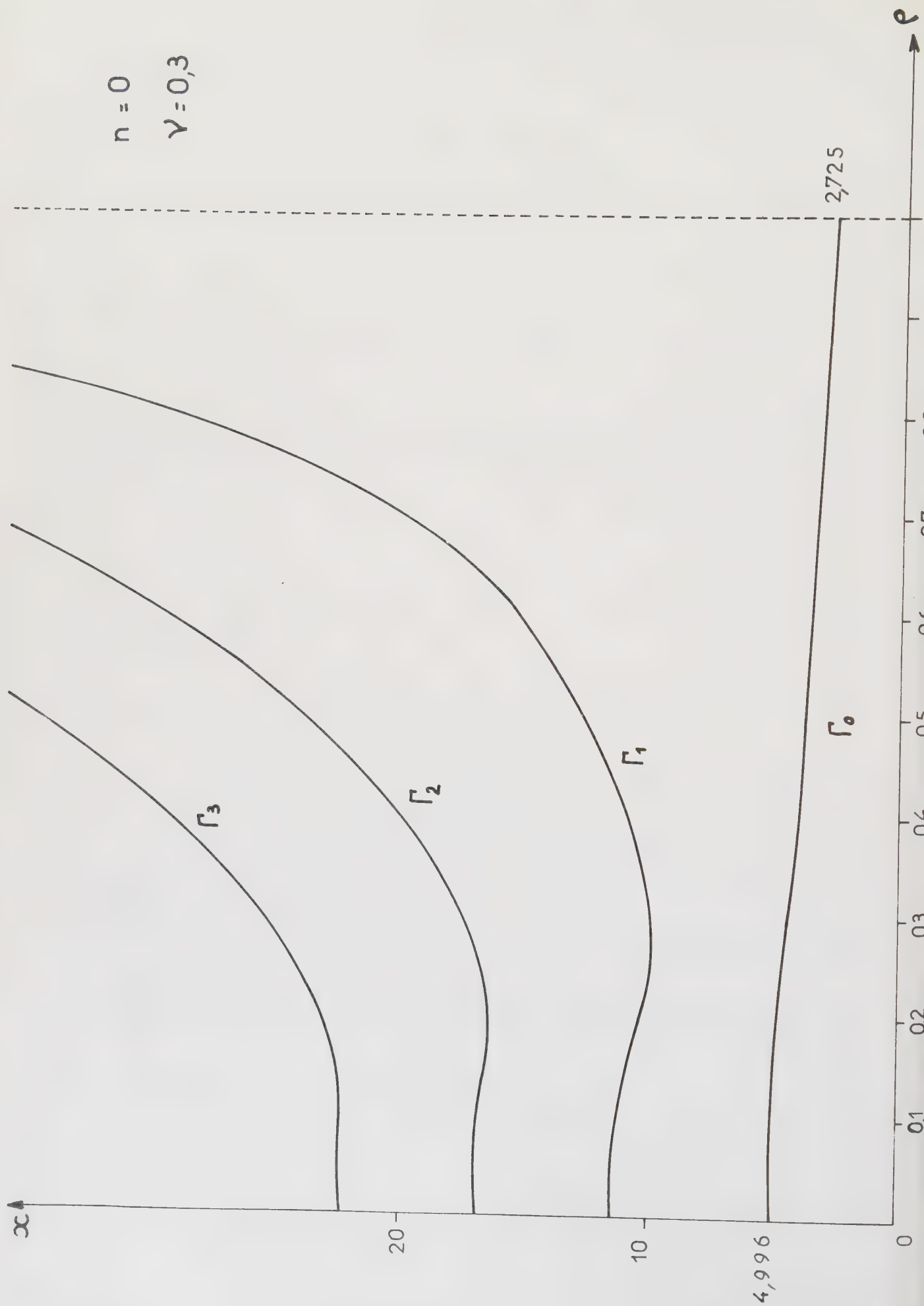
$\rho = \frac{a}{b}$ caractérise les dimensions géométriques du réservoir.

On utilisera aussi $\epsilon = \frac{b - a}{b} = \frac{h}{b} = 1 - \rho$ coefficient sans dimension appelé coefficient d'épaisseur

Une condition nécessaire et suffisante pour que (1-C) ait des solutions W_1 et W_2 qui ne soient pas toutes deux nulles est que le déterminant de C soit nul :

$$\begin{bmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ C_1(\rho x) & C_2(\rho x) \end{bmatrix} = 0 \quad (1-D)$$

$$n = 0$$
$$\gamma = 0,3$$



$W(x)$ est alors vecteur propre de $C(x)$ associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Soit $\Delta(\rho, x)$ le déterminant de $C(x)$

$$\Delta(\rho, x) = \begin{vmatrix} -2\gamma x \cos \gamma x + (2 - \frac{x^2}{2}) \sin \gamma x & , & -(2 - \frac{x^2}{2}) \cos \gamma x - 2\gamma x \sin \gamma x \\ -2\rho\gamma x \cos \rho\gamma x + (2 - \rho^2 \frac{x^2}{2}) \sin \rho\gamma x & , & -(2 - \rho^2 \frac{x^2}{2}) \cos \rho\gamma x - 2\gamma x \sin \rho\gamma x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta(\rho, x) = & \cos \gamma x \cos \rho\gamma x \left[-2(2 - \rho^2 \frac{x^2}{2}) + 2(\frac{x^2}{2} - 2) \right] \\ & + \sin \gamma x \sin \rho\gamma x \left[-2(2 - \rho^2 \frac{x^2}{2}) + 2(\frac{x^2}{2} - 2) \right] \\ & + \cos \gamma x \sin \rho\gamma x \left[4 + (2 - \frac{x^2}{2})(2 - \rho^2 \frac{x^2}{2}) \right] \\ & + \cos \rho\gamma x \sin \gamma x \left[-4 - (2 - \frac{x^2}{2})(2 - \rho^2 \frac{x^2}{2}) \right] = 0 \end{aligned}$$

On obtient l'équation aux fréquences x .

$$\boxed{\frac{\tan \varepsilon \gamma x}{\varepsilon \gamma x} = \frac{4(4 + \rho x^2)}{16\rho^2 \gamma^2 x^2 + (\rho^2 x^2 - 4)(x^2 - 4)}} \quad (1-E)$$

Cette équation a été obtenue par (5), (7), (10)

Nous avons fait un programme appelé RADIAL qui donne les fréquences x adimensionnelles.

La figure (1-A) donne $x = f(\rho)$. On obtient un réseau de courbes Γ_k (k indice entier ou nul)

Tout le long d'une courbe Γ_k , le nombre de noeuds de vibrations reste constant et égal à k

k est appelé indice nodal

Pour $k = 0$, les déformées correspondantes n'ont pas de noeud. Pour un point appartenant à Γ_k , la déformée correspondante à k noeuds et $k + 1$ surfaces sphériques d'isocontraintes nulles (en comptant $r = a$ et $r = b$)

III.2 - Cas de la membrane ($\varepsilon = 0$)

a) Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ($\rho \rightarrow 1^-$) $\frac{\text{tg } \varepsilon \gamma x}{\varepsilon \gamma x} \rightarrow 1$ et $x \rightarrow x_0$

tel qu'en utilisant l'équation aux fréquences :

$$16 + 4 x_0^2 = 16 \gamma^2 x_0^2 + (x^2 - 4)^2$$

$$x_0^2 = 12 - 16 \gamma^2$$

$$\gamma^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1-\nu)} \Rightarrow x_0^2 = \frac{4(1+\nu)}{1-\nu}$$

$$x_0^2 = 12 - 16 \gamma^2 = \frac{4(1+\nu)}{1-\nu}$$

(2-A)

Pour $\nu = 0,3$: $x_0^2 = 7,428571 \Rightarrow x_0 = 2,725$

(2-B)

b) On aurait pu obtenir x_0 d'une autre manière.

Lorsque $a \rightarrow b^-$ on doit avoir $\sigma_{rr} = 0$ pour $r = a$ et $r = b$. Si la contrainte reste bornée à la limite obtient :

$$\sigma_{rr} = \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = 0 \quad \text{pour } r = a \quad \text{et } r = b$$

x_0 est donc solution de :

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ \frac{dC_1(x)}{dx} & \frac{dC_2(x)}{dx} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{dC_1}{dx} = -2\gamma \cos \gamma x + 2\gamma^2 x \sin \gamma x - x \sin \gamma x + (2 - \frac{x^2}{2})\gamma \cos \gamma x$$

$$\frac{dC_1}{dx} = \left[-\frac{x^2}{2} \gamma \cos \gamma x + x (2 \gamma^2 - 1) \sin \gamma x \right]$$

par symétrie :

$$\frac{dC_2}{dx} = \left[-x (2 \gamma^2 - 1) \cos \gamma x - \frac{x^2}{2} \gamma \cos \gamma x \right]$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} -2 \gamma x \cos \gamma x + (2 - \frac{x^2}{2}) \sin \gamma x, & - (2 - \frac{x^2}{2}) \cos(\gamma x) - 2 \gamma x \sin \gamma x \\ -\frac{x^2}{2} \gamma \cos \gamma x + x (2 \gamma^2 - 1) \sin \gamma x, & -x (2 \gamma^2 - 1) \cos \gamma x - \frac{x^2}{2} \gamma \cos \gamma x \end{vmatrix}$$

(2-C)

$$\Delta_1(x_0) = -2 \gamma x_0^2 (2 \gamma^2 - 1) + \frac{x_0^2}{2} (2 - \frac{x_0^2}{2}) \gamma = 0$$

soit :

$$2 - \frac{x_0^2}{2} = 4(2 \gamma^2 - 1) = 8 \gamma^2 - 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_0^2 = 12 - 16 \gamma^2}}$$

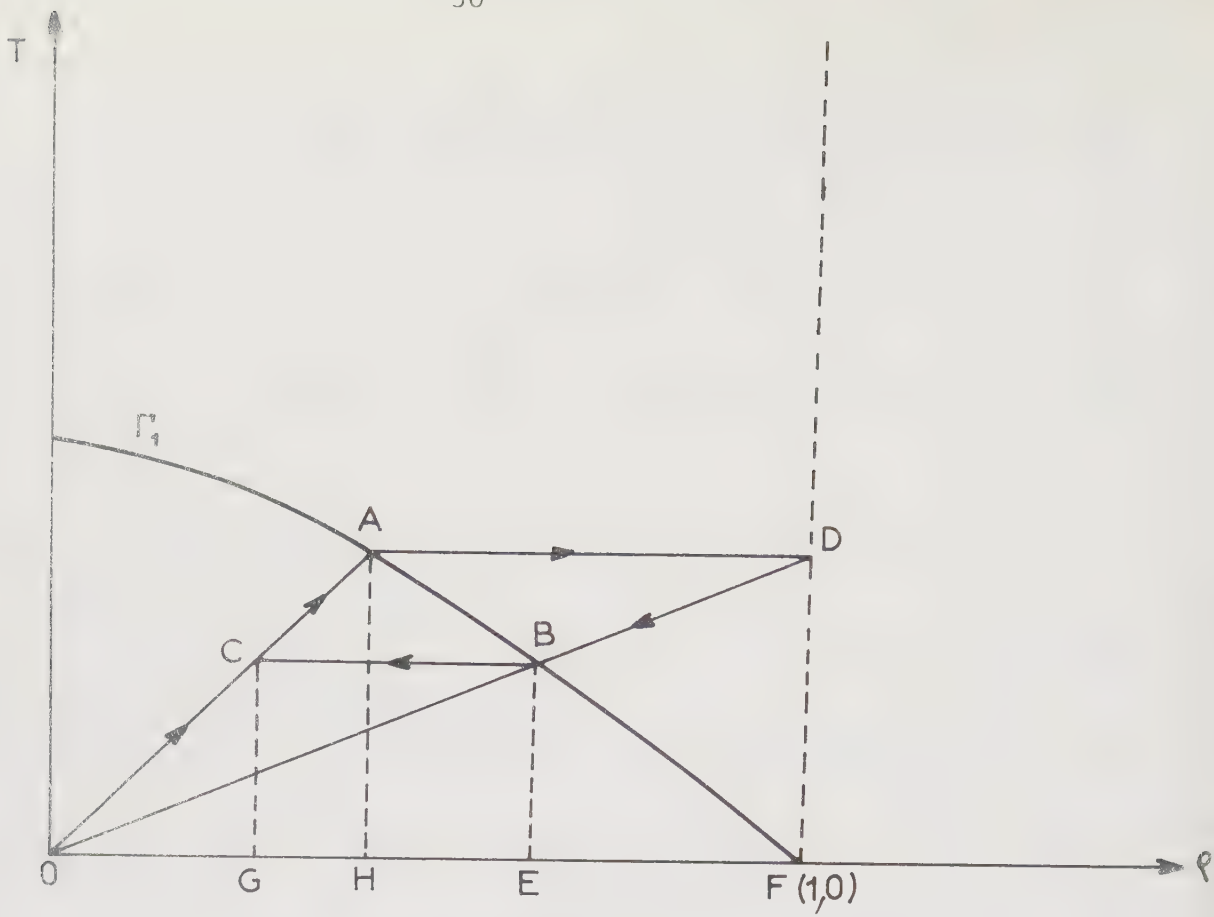
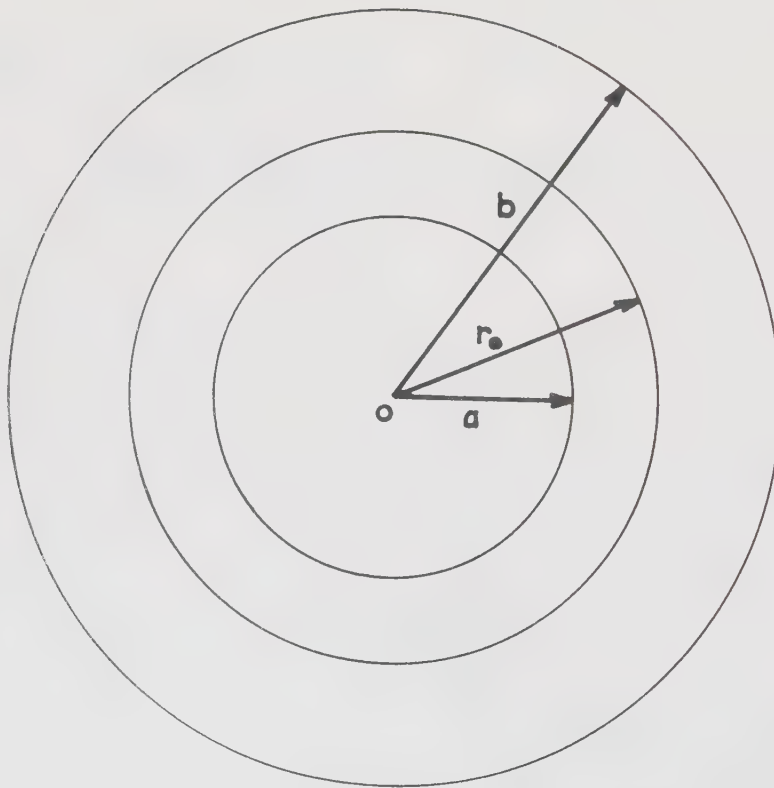


figure III.3.A



$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{r_0} \times \frac{r_0}{b}$$

III.3 - Isocontraintes nulles

Nous nous proposons de chercher une construction géométrique simple de Γ_2 à partir de Γ_1

III.3.1 - Isocontraintes nulles

a) Soit Σ un réservoir sphérique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , de coefficient d'épaisseur $\epsilon = 1 - \rho = \frac{b - a}{b}$

Soient $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots x_i \leq x_{i+1} \dots$ le spectre de fréquence du réservoir $\Sigma(a,b)$ avec :

$$a) \quad x_i = \beta_i b$$

$$b) \quad \beta_i = \sqrt{\frac{G}{\rho_1}} \quad \omega_i$$

Un vecteur propre possible de (1-D) est, d'après (1-C) :

$$W_1 = -C_2(x_i) \tag{3-A}$$

$$W_2 = C_1(x_i)$$

L'unique composante σ_{rr} de la contrainte radiale $\vec{\Phi}_r$ s'écrit à un facteur multiplicatif près :

$$\sigma_{rr}(x_i, r) = \begin{vmatrix} C_1(\eta) & C_2(\eta) \\ C_1(x_i) & C_2(x_i) \end{vmatrix} \tag{3-B}$$

où a) $\eta = \beta_i r$

$$b) \quad C_1(\eta) = -2 \gamma \eta \cos \gamma \eta + \sin \gamma \eta \left(2 - \frac{\eta^2}{2}\right)$$

$$c) \quad C_2(\eta) = -\left(2 - \frac{\eta^2}{2}\right) \cos \gamma \eta - 2 \gamma \eta \sin \gamma \eta$$

b) Soit r_0 une solution de $q_{rr}(x_i, r_0) = 0$ avec $a < r_0 < b$

On obtient, en développant (3-B) :

$$\begin{aligned} & \cos \gamma (\eta - x_i) \left[-2\gamma \eta \left(2 - \frac{x_i^2}{2} \right) \right] + \sin \gamma (\eta - x_i) \left[\left(2 - \frac{\eta^2}{2} \right) \left(2 - \frac{x_i^2}{2} \right) \right] \\ & + \sin \gamma (\eta - x_i) \left[4 \gamma^2 x_i \eta \right] + \cos \gamma (\eta - x_i) \left[2\gamma x_i \left(2 - \frac{\eta^2}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma (\eta - x_i) = \frac{2 \gamma \eta \left(2 - \frac{x_i^2}{2} \right) - 2 \gamma x_i \left(2 - \frac{\eta^2}{2} \right)}{4 \gamma^2 x_i \eta + \left(2 - \frac{\eta^2}{2} \right) \left(2 - \frac{x_i^2}{2} \right)}} \quad (3-C)$$

Cette équation donne les isocontraintes nulles de $\Sigma(a,b)$ pour une fréquence x_i donnée de $\Sigma(a,b)$

Les isocontraintes nulles sont des sphères

Soit Σ_1 la sphère de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur b , de coefficient d'épaisseur $\varepsilon_1 = 1 - \rho_1 = \frac{b - r_0}{b}$

Si on remplace ε_1 et ρ_1 par leurs valeurs dans (3-C), on obtient :

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 \gamma x_i = \frac{4 (4 + \rho_1 x_i^2)}{16 \rho_1 \gamma^2 x_i^2 + (\rho_1^2 x_i^2 - 4) (x_i^2 - 4)} \quad (3-D)$$

ce qui montre (confère III.1.E) que x_i est une fréquence adimensionnelle de $\Sigma_1(r_0, b)$

Si $y_0 \leq y_1 \leq y_2 \dots \dots \dots y_j \leq y_{j+1}$ est le spectre de Σ_1 il existe $j < i$ tel que $y_j = x_i$

Conclusion

Soit x_1 une fréquence propre de $\Sigma(a,b)$ et r_0 une solution de $\sigma_{rr}(x_1, r_0) = 0$ alors x_1 est aussi fréquence propre $y_j = x_1$ du réservoir $\Sigma_1(r_0, b)$

III.3.2 - Remarque

a) $\Sigma(a,b)$ et $\Sigma_1(r_0, b)$ sont définis de la même manière qu'en (3-1) soit $\Sigma_2(a, r_0)$.

Géométriquement (figure (3-A)) : $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

On suppose que $x_1 = x_2$ (troisième fréquence de Σ)

r_0 est unique solution ($a < r_0 < b$) de $\sigma_{rr}(x_2, r) = 0$

b) Soit $T_2 = \frac{2\pi}{x_2}$ la période adimensionnelle correspondant à x_2

Dans le plan $O\rho T$ (abscisse ρ , ordonnée T), soit A le point de coordonnées $\rho_A = \frac{a}{r_0}$ et T_A (A correspond à Σ_1)

On trace la droite OA. De A, on mène la parallèle à $\vec{O\rho}$ qui coupe la droite $\rho = 1$ en D.

On mène ensuite OD qui coupe la courbe Γ_1 en B. La parallèle à $\vec{C\rho}$ menée par B coupe OA en C.

Si B a pour coordonnées $\rho_B = \frac{r}{b}$ et T_B alors $T_B = T_C$.

C a pour coordonnées $\rho_C = \frac{a}{b}$ et T_C

Les triangles OEB et OFD sont semblables :

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{\frac{r}{b}}{1} = \frac{r}{b} \Rightarrow T_B = \frac{r}{b} T_A \Rightarrow T_B = \rho_B T_A$$

Les triangles OGC et OHA sont semblables :

$$\frac{T_C}{T_A} = \frac{\rho_C}{\rho_A} \Rightarrow \frac{r}{b} = \frac{\frac{a'}{b}}{\frac{a}{r}} \Rightarrow a = a'$$

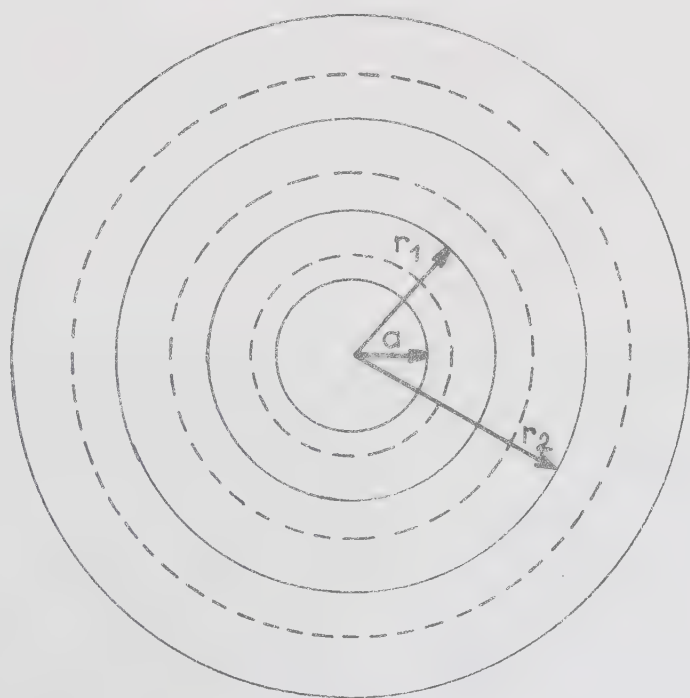
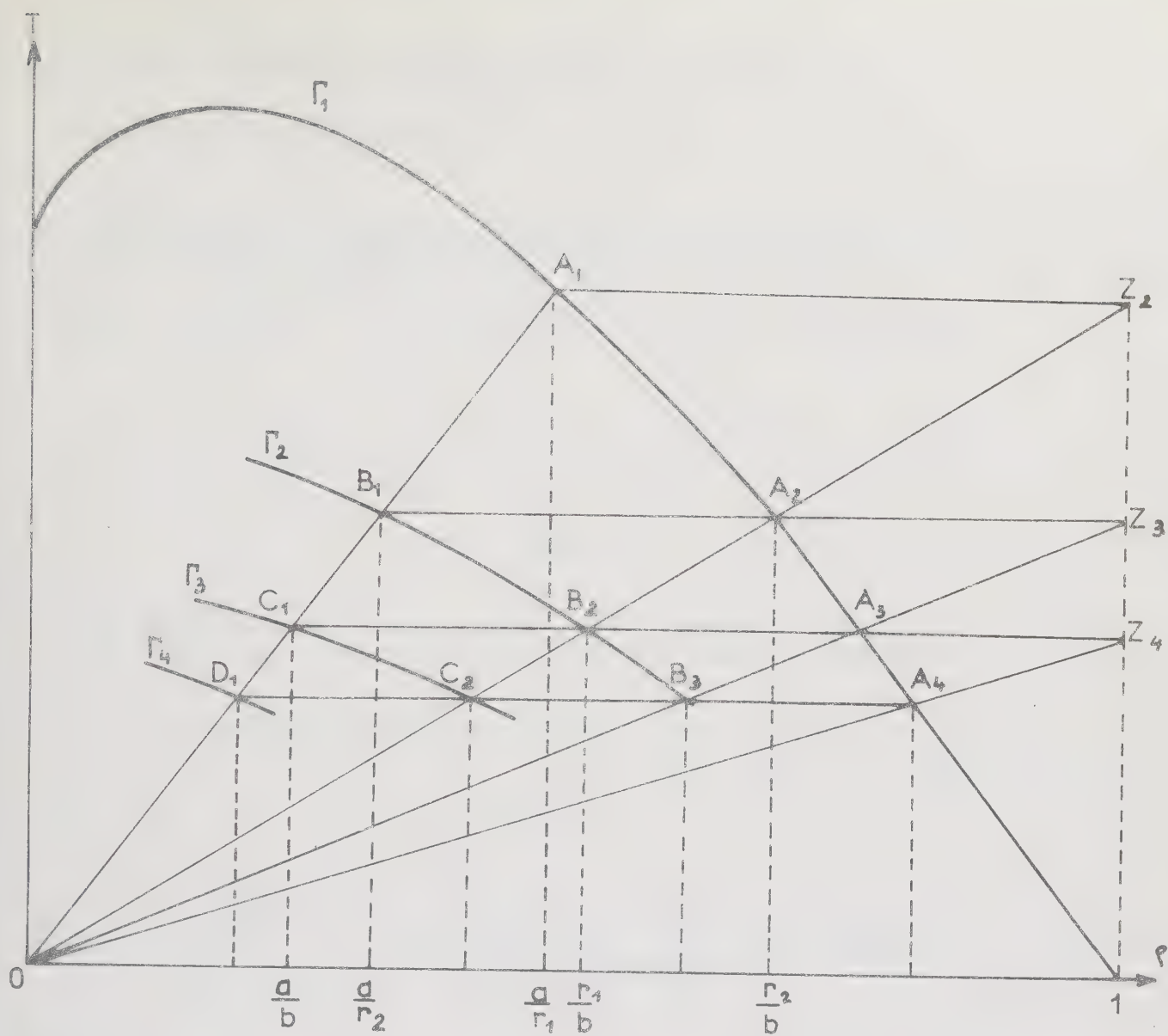


Figure III-4-B

On a donc $C = B + A$ (les trois sphères correspondantes s'emboîtent).

D'autre part : $\sigma_{rr}(x_2, r) = 0$ pour B donc pour C, et $r = r_0$.

C représente $\Sigma(a, b)$.

Il reste à montrer que les déplacements pour les trois sphères A, B, C sont identiques pour $r = r_0$, et on pourra le "recoller dynamiquement".

$$C = B + A$$

c) Le déplacement en un point r_0 d'une sphère a la forme :

$$u = W_1 \frac{dj_0}{dr} (\alpha r_0) + W_2 \frac{dy_0}{dr} (\alpha r_0)$$

Il suffit de montrer que les vecteurs propres associés aux points A, B, C sont proportionnels pour que les déplacements soient les mêmes.

a) Si x_A est la fréquence adimensionnelle correspondant à A un vecteur propre $\vec{W}_A$ possible est :

$$W_1 = -C_2(x_A) ; \quad W_2 = C_1(x_A)$$

Remarquons que le vecteur de composantes : $W_1 = -C_2(\rho_A x_A) ; W_2 = C_1(\rho_A x_A)$ est proportionnel à $\vec{W}_A$ d'après (1-D).

b) x_B correspond à B et $x_B \rho_B = x_A$. Un vecteur propre possible est $\vec{W}_B$ de composantes :

$$W_1 = -C_2(\rho_B x_B) ; \quad W_2 = C_1(\rho_B x_B)$$

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A$$

c) $x_C = x_B$ correspond à C. Un vecteur propre possible est $\vec{W}_C$ de composantes :

$$W_1 = -C_2(\rho_C x_C) ; \quad W_2 = C_1(\rho_C x_C)$$

$$\text{Or } \rho_C = \rho_A \times \rho_B ; \quad x_C = x_B \Rightarrow \rho_C x_C = \rho_A \times (\rho_B x_B) = \rho_A x_A$$

$\vec{W}_C$ est proportionnel à $\vec{W}_A$

III.3.3 - Construction de Γ_2 à partir de Γ_1

Supposons Γ_1 tracée.

Soit A un point quelconque de Γ_1 . On joint OA. La parallèle à $O\rho$ menée par A coupe la droite $\rho = 1$ en D. La droite OD coupe Γ_1 en B.

La parallèle à $O\rho$ menée par B coupe OA en C qui appartient à Γ_2 d'après III.3.2

III.4 - Construction géométrique

On se propose de tracer Γ_i ($i > 1$) à partir de Γ_1

III.4.1 - La droite des maxima (figure III-IV-A)

La courbe Γ_1 a pour équation cartésienne dans les axes $(\vec{O\rho}, \vec{OT})$:

$T = f(\rho)$. Γ_1 est convexe sur $[0, 1]$ avec $f(1) = 0$

On suppose que Γ_1 atteint son maximum $f(\rho_0)$ en un point $A_0(\rho_0, f(\rho_0))$ avec $0 < \rho_0 < 1$ (voir figure 4-A)

a) La droite OA_0 a pour pente $\frac{f(\rho_0)}{\rho_0}$ et pour équation $T = \frac{f(\rho_0)}{\rho_0} \rho$.

La parallèle à l'axe des abscisses menée par A_0 rencontre la droite $\rho = 1$ au point $D_0(1, f(\rho_0))$

b) La droite OD_0 a pour pente $f(\rho_0)$ et pour équation $T = f(\rho_0)\rho$. Elle rencontre Γ_1 en $B_0(\rho_1, f(\rho_1))$, tel que :

$$f(\rho_0) = \frac{f(\rho_1)}{\rho_1}$$

c) La parallèle menée par B_0 à l'axe des ρ rencontre OA_0 en $C_0(\rho_2, f(\rho_1))$ tel que $\frac{f(\rho_0)}{\rho_0} \rho_2 = f(\rho_1) \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \times \rho_0$

d) Si on considère A tel que : $A(\rho, f(\rho_0))$ et $\rho \neq \rho_0$, la construction précédente donnera une droite OD de pente $f(\rho)$ inférieure à $f(\rho_0)$, donc un point D d'ordonnée inférieure à celle de D_0 . L'ordonnée du point C correspondant sera inférieure à celle de C_0 . Le point C_0 est un maximum de Γ_2

e) Tous les maxima des courbes Γ_i ($i > 1$) sont alignés sur une même droite.

Il suffit, à partir du maximum A_0 , de tracer OA_0 , et on a tous les maxima des courbes Γ_i sur OA_0 appelée droite des maxima.

III.4.2 - Construction de Γ_3 (figure III-4-B)

Soit C_1 un point de Γ_3 . La droite OC_1 rencontre Γ_2 en B_1 et Γ_1 en A_1 (figure (4-B)). Le point C_1 a pour abscisse $\rho = \frac{a}{b}$

a) La parallèle à l'axe $\vec{Op}$, B_1Z_3 , rencontre Γ_1 en A_2 et la droite $\rho = 1$ en Z_3 .

Par construction de Γ_2 : $B_1 = A_1 + A_2$

Si les points B_1, A_1, A_2 ont respectivement pour abscisse $\frac{a}{r_2}$,

$$\frac{a}{r_1}, \frac{r_1}{r_2}, \text{ on a : } \frac{a}{r_2} = \frac{a}{r_1} \times \frac{r_1}{r_2} \quad (a < r_1 < r_2)$$

b) La droite OA_2 coupe la parallèle à $\vec{Op}$, C_1Z_4 , en A_2 . C_1Z_4 intersecte Γ_1 en A_3 .

Nécessairement $B_2 = A_2 + A_3$

Les points B_2, A_2, A_3 ont respectivement pour abscisse $\frac{r_1}{b}, \frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{b}$

On voit que : $C_1 = B_1 + A_3 = B_2 + A_1 = A_1 + A_2 + A_3$ et que r_1 et r_2 sont les deux isocontraintes nulles de C_1 ($a < r_1 < r_2 < b$)

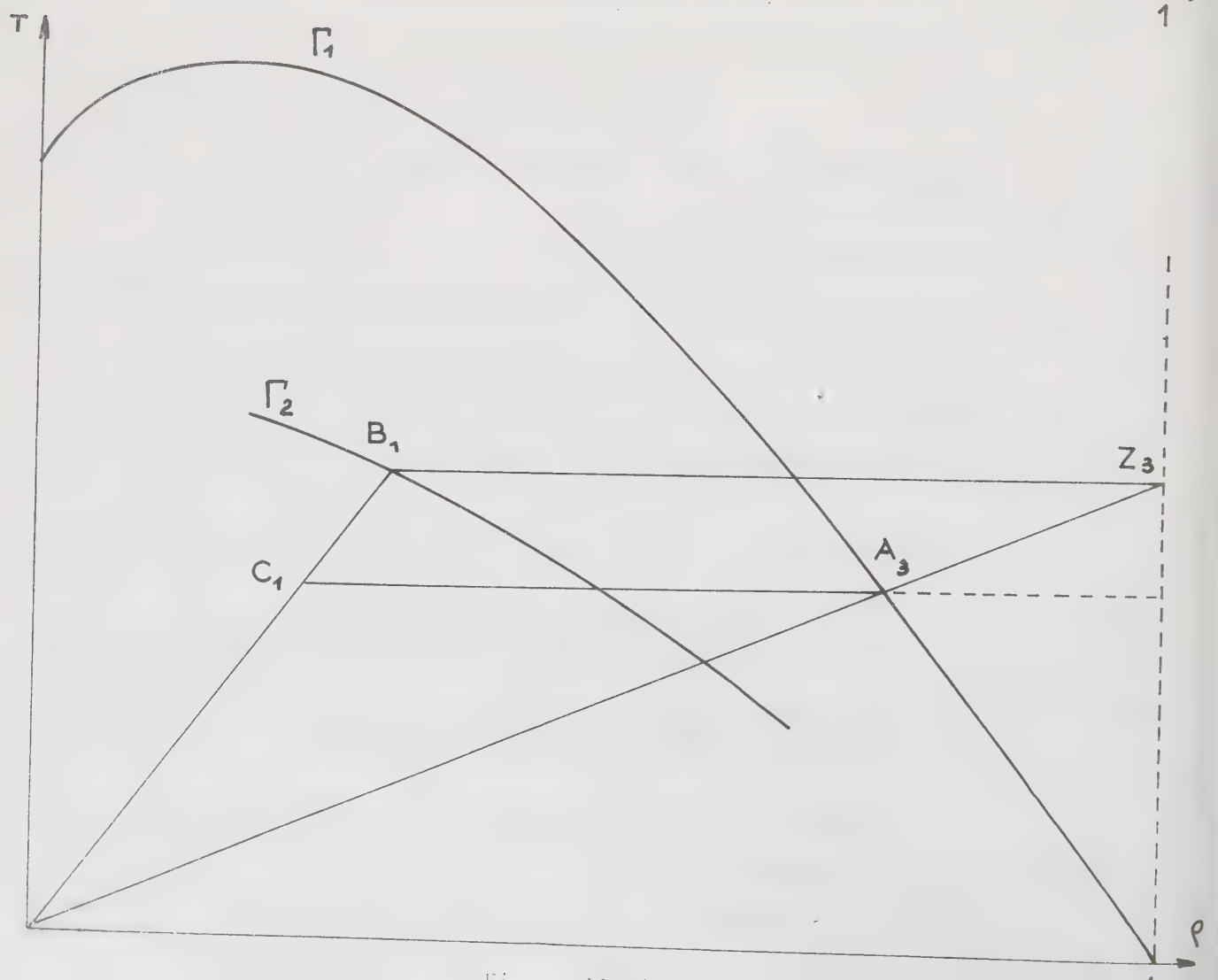
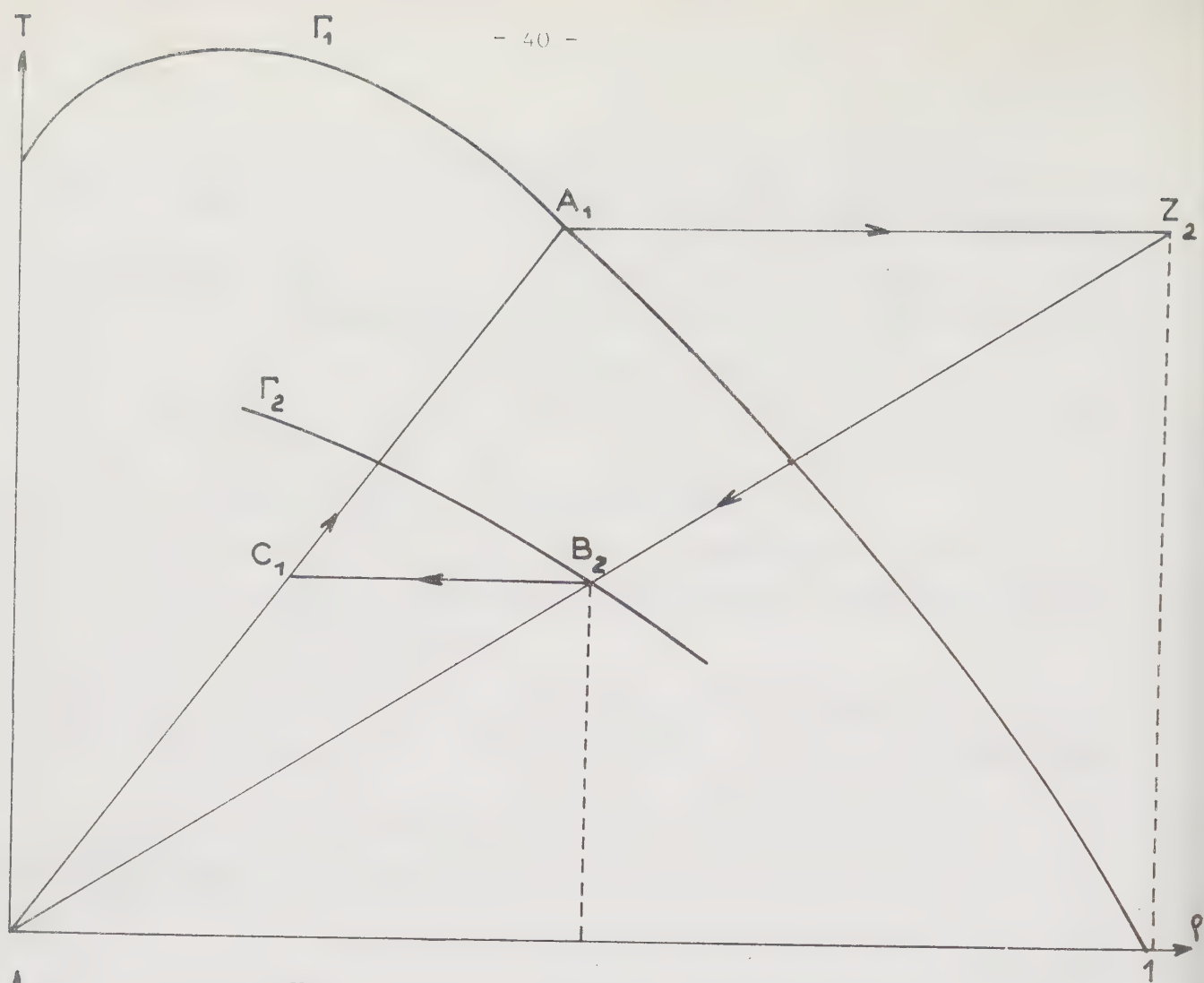
On peut obtenir Γ_3 à partir de Γ_1 et Γ_2 , de deux manières (figure 4-C) :

a) Soit $A_1 \in \Gamma_1$. On mène la parallèle à $\vec{Op}$, AZ_2 . On trace OZ_2 qui coupe Γ_2 en B_2 .

La parallèle à $\vec{Op}$ menée par B_2 coupe OA_1 en C_1

b) Soit $B_1 \in \Gamma_2$. La parallèle B_1Z_3 coupe Γ_1 en A_2 et la droite OA_2 $\rho = 1$ en Z_3 . OZ_3 coupe Γ_1 en A_3

On mène la parallèle à $\vec{Op}$, A_3Z_4 , qui coupe OB_1 en C_1



III.4.3 -

Pour obtenir Γ_k en fonction des courbes précédentes Γ_i ($i < k$), on procède de la même manière.

Pour $k = 4$ par exemple : $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$

Il y a trois méthodes différentes

Pour un indice k quelconque, il y a $k - 1$ possibilités.

La figure (4-B) donne $D_1 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

La connaissance des déformées de Γ_1 permet, en outre, de déterminer toutes les déformées des courbes Γ_k .

III-5 - CONCLUSIONS

Les vibrations radiales d'un réservoir sphérique sont les plus simples.

Les courbes $(x = f_k(\epsilon))$ ont été tracées où x est la fréquence adimensionnelle et le coefficient de fréquence $(\epsilon = \frac{b-a}{b})$.

Le long de Γ_k le nombre de noeuds du réservoir reste constant et égal à k ainsi que le nombre d'isocontraintes nulles ($\sigma_{rr} = 0$) égal à $k + 1$. k est l'indice nodal.

Il est possible par une construction géométrique simple d'obtenir les courbes Γ_i ($i > 1$) à partir de Γ_1 en utilisant la "période réduite" $T = \frac{2\pi}{x}$

La figure III-4-D donne les courbes Γ_i réelles.

Nous remercions Monsieur PIRONNEAU pour la contribution qu'il a apporté à cette construction géométrique.

Pour une membrane ($\epsilon = 0$), il existe un seul mode x_0 tel que :

$$x_0^2 = 12 - 16 \gamma^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

LES VIBRATIONS RADIALES

(les courbes Γ_i sont obtenues à partir de Γ_1)

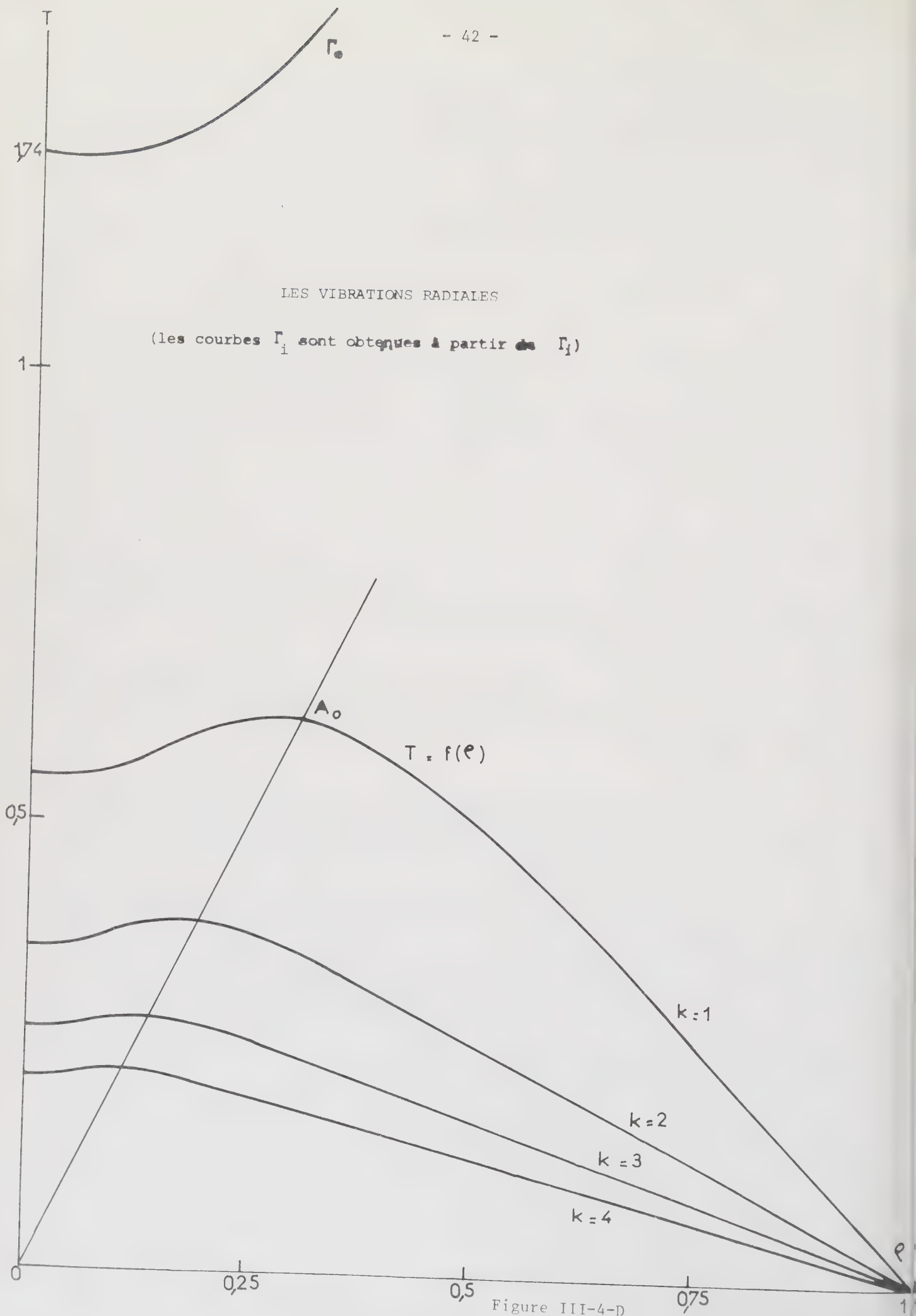


Figure III-4-D

IV - Vibrations (R, θ, φ)

Dans ce type de vibration, il y a couplage entre les trois directions $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

Nous nous sommes attachés à tracer des courbes de fréquence adimensionnelle $\epsilon = g_n(x_i)$

où

$$a) \epsilon = \frac{h}{b} = \frac{\text{épaisseur}}{\text{rayon extérieur}}$$

$$b) x_i = \beta_i b \quad ; \quad \beta_i \text{ proportionnel à la pulsation cherchée } \omega_i$$

La fréquence réelle est donnée par la formule
$$f_i = \frac{x_i}{2\pi b} \sqrt{\frac{G}{\rho_1}}$$

$$f_i = \frac{K_1 x_i}{b} \text{ pour un matériau donné.}$$

Dans le cas de l'acier, $f_i = \frac{500 x_i}{b}$. Les courbes de fréquence ont été calculées pour $\nu = 0,3$ (aciers usuels)

Les déformées ont été calculées et tracées pour $\epsilon = 0$ (membrane)
pour les premières valeurs de l'indice de vibration n

IV.1 - Analyse des vibrations (R, θ, φ)

Le système (R, θ, φ) correspond à des vibrations quelconques avec $a_2 \equiv 0$

Le déplacement $\vec{\xi}$ a pour composantes :

$$\begin{aligned} u &= \left[a_1 \frac{dR_n}{dr} + a_3 n(n+1) \frac{S_n(r)}{\beta r} \right] P_n^m(\cos \theta) \cos m \phi \\ v &= \left[a_1 \frac{R_n(r)}{r} + \frac{a_3}{\beta r} \frac{d}{dr} (r S_n(r)) \right] \frac{dP_n^m}{d\theta} \cos m \phi \\ w &= \left[a_1 \frac{R_n(r)}{r} + \frac{a_3}{\beta r} \frac{d}{dr} (r S_n(r)) \right] \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin m \phi \end{aligned} \quad (1-A)$$

$$C_{11} = \frac{2(n-1)}{b^2} j_n(\alpha b) - \frac{2\alpha}{b} j_{n+1}(\alpha b)$$

$$C_{12} = \frac{2(n-1)}{b^2} y_n(\alpha b) - \frac{2\alpha}{b} y_{n+1}(\alpha b)$$

$$C_{13} = \left[\frac{2(n^2-1)}{\beta b^2} - \beta \right] j_n(\beta b) + \frac{2}{b} j_{n+1}(\beta b)$$

$$C_{14} = \left[\frac{2(n^2-1)}{\beta b^2} - \beta \right] y_n(\beta b) + \frac{2}{b} y_{n+1}(\beta b)$$

$$C_{21} = \frac{1}{b^2} \left[\left(n(n-1) - \beta^2 \frac{b^2}{2} \right) j_n(\alpha b) + 2 \alpha b j_{n+1}(\alpha b) \right]$$

$$C_{22} = \frac{1}{b^2} \left[\left(n(n-1) - \beta^2 \frac{b^2}{2} \right) y_n(\alpha b) + 2 \alpha b y_{n+1}(\alpha b) \right]$$

$$C_{23} = \frac{1}{b} \left[\frac{(n-1) j_n(\beta b)}{\beta b} - j_{n+1}(\beta b) \right] n(n+1)$$

$$C_{24} = \frac{1}{b} \left[\frac{(n-1) y_n(\beta b)}{\beta b} - y_{n+1}(\beta b) \right] n(n+1)$$

Les coefficients C_{3i} et C_{4i} se déduisent respectivement de C_{1i} et C_{2i} en remplaçant b par a

On obtient ainsi des déplacements dans les trois directions $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

a) Les vibrations sont axisymétriques lorsque l'indice m modal est nul. ξ prend alors la forme :

$$u = a_1 \frac{dR_n}{dr} + a_3 n(n+1) \frac{S_n(r)}{\beta r} P_n(\cos \theta) \quad B1$$

$$v = - \left[a_1 \frac{R_n(r)}{r} + a_3 \frac{1}{\beta r} \frac{d}{dr} (r S_n(r)) \right] P_n^1(\cos \theta) \quad B2 \quad (1-B)$$

$$w = 0$$

$$\text{en utilisant la relation } \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = -P_n^1(\cos \theta)$$

b) Pour $0 < m \leq n$ les vibrations ne sont plus axisymétriques.

Une condition nécessaire et suffisante pour le système (R, θ, ϕ) admette des solutions W_i non toutes nulles est que :

$$\delta = \det c_{ij} = 0 \quad (1-C)$$

(1-C) donne les fréquences propres du type (R, θ, ϕ)

On remarque, figure (1-A), que les coefficients $C_{i,j}$ sont indépendants de l'indice modal m

Il en résulte que les fréquences propres sont indépendantes de l'indice modal m

IV.2 - Mise sous forme adimensionnelle

Il apparaît nécessaire de donner des résultats très généraux et ceci quelque soient les rayons a et b , c'est à dire quelles que soient les dimensions géométriques du réservoir sphérique.

Il est nécessaire d'effectuer sur δ les opérations élémentaires suivantes :

- Multipliation des deux premières lignes par b^2
- Multipliations des deux dernières lignes par a^2
- Multipliation des deux dernières colonnes par $\frac{\beta}{2}$

$$\left[\frac{n^2 - 1 - \frac{x^2}{2}}{2} \right] y_n(x) + x y_{n+1}(x)$$

$$\left[\frac{n^2 - 1 - \frac{x^2}{2}}{2} \right] j_n(x) + x j_{n+1}(x)$$

$$2(n-1) y_n(yx) - 2yx y_{n+1}(yx)$$

$$j_n(yx)$$

$$- 2yx j_{n+1}(yx)$$

$$j_n(yx)$$

$$- 2yx j_{n+1}(yx)$$

$$j_n(yx)$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \left[\frac{(n-1)}{2} y_n(x) - x y_{n+1}(x) \right]$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \left[\frac{(n-1)}{2} j_n(x) - x j_{n+1}(x) \right]$$

$$\left[\frac{n(n-1) - \frac{x^2}{2}}{2} \right] y_n(yx) + 2yx y_{n+1}(yx)$$

$$j_n(yx)$$

$$+ 2yx j_{n+1}(yx)$$

$$j_n(yx)$$

$$- 2yx j_{n+1}(yx)$$

$$j_n(yx)$$

$$\left[\frac{n^2 - 1 - \rho^2 \frac{x^2}{2}}{2} \right] y_n(\rho x) + x y_{n+1}(\rho x)$$

$$\left[\frac{n^2 - 1 - \rho^2 \frac{x^2}{2}}{2} \right] j_n(\rho x) + \rho x j_{n+1}(\rho x)$$

$$2(n-1) y_n(\rho yx) - 2\rho yx y_{n+1}(\rho yx)$$

$$j_n(\rho yx)$$

$$- 2\rho yx j_{n+1}(\rho yx)$$

$$j_n(\rho yx)$$

$$- 2\rho yx j_{n+1}(\rho yx)$$

$$j_n(\rho yx)$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \left[\frac{(n-1)}{2} y_n(\rho x) - \rho x y_{n+1}(\rho x) \right]$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \left[\frac{(n-1)}{2} j_n(\rho x) - \rho x j_{n+1}(\rho x) \right]$$

$$\left[\frac{n(n-1) - \rho^2 \frac{x^2}{2}}{2} \right] y_n(\rho yx) + 2\rho yx y_{n+1}(\rho yx)$$

$$j_n(\rho yx)$$

$$+ 2\rho yx j_{n+1}(\rho yx)$$

$$j_n(\rho yx)$$

$$- 2\rho yx j_{n+1}(\rho yx)$$

$$j_n(\rho yx)$$

Les coefficients $x = \beta b$; $\rho = \frac{a}{b}$; $\varepsilon = \frac{h}{b}$ seront à nouveau utilisés

IV.2.1 - Remarque 1

Le coefficient $t^* = \frac{b-a}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2(b-a)}{a+b}$ est utilisé par (13)

à la place de $\varepsilon = \frac{b-a}{b}$

Mais ce coefficient t^* est peu maniable étant donné la forme de $\delta(\rho, x)$
 t^* varie de 0 à 2 et $t^* \approx \varepsilon$ lorsque l'épaisseur du réservoir est faible
 $(t^* = \frac{2\varepsilon}{2-\varepsilon})$

IV.2.2 - Remarque 2

Les nouveaux coefficients $C_{i,j}(\rho, x)$ sont donnés à la figure (2-A)

On remarque :

a) la symétrie (j_n, y_n) des coefficients C_{ij} . On obtient $C_{i,3}$
 (respectivement $C_{i,4}$) en changeant j en y dans $C_{i,1}$ (respectivement $C_{i,2}$)

b) La symétrie $(x, \rho x)$ de $\delta(\rho, x)$

$$\delta(\rho, x) \text{ est du type } \begin{vmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \\ L_1(\rho x) \\ L_2(\rho x) \end{vmatrix}$$

On obtient la ligne 3 (respectivement 4) en changeant x en ρx dans la ligne 1
 (respectivement 2)

IV.3 - Résolution exacte : principe

IV.3.1 - Notations

a) $\Delta_{i,j}^{k,l}$ est le déterminant de la sous matrice de C formée à partir
 des lignes i et j ($i \neq j$) et des colonnes k et l ($k \neq l$)

 C_{11} 	 C_{12} 	C_{13}	C_{14}
 = = = C_{21} = = =	 = = = C_{22} = = =	= = = C_{23} = = =	= = = C_{24} = = =
 = = = C_{31} = = =	 = = = C_{32} = = =	= = = C_{33} = = =	= = = C_{34} = = =
 C_{41} 	 C_{42} 	C_{43}	C_{44}

Le déterminant supplémentaire de Δ_{23}^{12} est obtenu en "rayant" les colonnes 1 et 2 et les lignes 2 et 3, ce qui donne :

$$S_{\Delta_{23}}^{12} = \Delta_{14}^{34}$$

figure IV.3.A

par exemple :

$$\Delta_{1 \ 2}^{1 \ 2} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

b) $S_{\Delta_{i \ j}^{k \ l}}^{k \ l}$, déterminant d'ordre deux, est le déterminant supplémentaire de $\Delta_{i \ j}^{k \ l}$. Il est obtenu en "rayant" les lignes i et j et les colonnes k et l de δ (voir figure (3-A))

c) Pour calculer δ , on va développer δ suivant les deux premières colonnes pour garder la symétrie (j,y)

IV.3.2 - Théorème de Laplace

Nous utilisons le théorème de Laplace

$$\delta(\rho, x) = \sum_{i_1 \neq i_1'} (-1)^{1+2+i_1+i_2} \Delta_{i_1 \ i_2}^{1 \ 2} S_{\Delta_{i_1 \ i_2}^{1 \ 2}}^{1 \ 2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \delta(\rho, x) = & \Delta_{1 \ 2}^{1 \ 2} \Delta_{3 \ 4}^{3 \ 4} - \Delta_{1 \ 3}^{1 \ 2} \Delta_{2 \ 4}^{3 \ 4} + \Delta_{1 \ 4}^{1 \ 2} \Delta_{2 \ 3}^{3 \ 4} \\ & + \Delta_{2 \ 3}^{1 \ 2} \Delta_{1 \ 4}^{3 \ 4} - \Delta_{2 \ 4}^{1 \ 2} \Delta_{1 \ 3}^{3 \ 4} + \Delta_{3 \ 4}^{1 \ 2} \Delta_{1 \ 2}^{3 \ 4} \end{aligned} \quad (3-A)$$

Il faut donc calculer douze déterminants d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions de Bessel sphériques f_n

IV.4 - Equation aux fréquences propres

La figure (3-B) donne un résumé du calcul des douze déterminants

$$\Delta_{i \ j}^{k \ l} \text{ de } \delta(\rho, x)$$

IV.4.1 - Les fonctions $T_{n,m}(x)$ et $T_{n,m}^\gamma(x)$

a) On définit la fonction $T_{n,m}(x)$ par :

$$T_{n,m}(x) = j_n(x) y_m(\rho x) - y_n(x) j_m(\rho x) \quad (4-A)$$

où

a) m et n sont des entiers positifs ou nuls

b) $0 < \rho < 1$

c) $x > 0$

b) Dans l'annexe I (chapitre VIII), certaines propriétés des fonctions de Bessel sont résumées.

En particulier (VIII.1.C) :

$$j_n(x) = A_n(x) \cos(x) + B_n(x) \sin x$$

$$y_n(x) = -B_n(x) \cos x + A_n(x) \sin x$$

$A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont des polynômes en $\frac{1}{x}$

On note $A_k(\rho x)$ (respectivement $B_k(\rho x)$) par A_k^0 (respectivement B_k^0).

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} T_{n,m}(x) = & \sin(\rho-1)x \left[A_n A_m^0 + B_n B_m^0 \right] \\ & - \cos(\rho-1)x \left[A_n B_m^0 - A_m^0 B_n \right] \end{aligned} \quad (4-B)$$

ou encore :

$$T_{n,m}(x) = C_{n,m}^1 \cos(\rho-1)x + S_{n,m}^1 \sin(\rho-1)x \quad (4-C)$$

Les coefficients $C_{n,m}^1$ et $S_{n,m}^1$ sont des fractions rationnelles en ρ et en x .

c) La fonction $T_{n,m}^\gamma(x)$ est définie par :

$$T_{n,m}^\gamma(x) = T_{n,m}(\gamma x) \quad (4-D)$$

ce qui donne :

$$T_{n,m}^\gamma(x) = C_{n,m}^\gamma(x) \cos(\rho-1)\rho x + S_{n,m}^\gamma(x) \sin(\rho-1)\gamma x \quad (4-E)$$

avec :

$$a) C_{n,m}^\gamma(x) = C_{n,m}(\gamma x)$$

$$b) S_{n,m}^\gamma(x) = S_{n,m}(\gamma x)$$

$$c) j_n(\gamma x) = A_n(\gamma x) \cos \gamma x + B_n(\gamma x) \sin \gamma x = A_n^\gamma \cos \gamma x + B_n^\gamma \sin(\gamma x)$$

IV.4.2 - Equation aux fréquences

à l'aide :

a) des huit coefficients :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{x}{\rho^2} \left[2n^2 - n - 1 - \rho^2 \frac{x^2}{2} \right]; & A' &= x \left[2n^2 - n - 1 - \frac{x^2}{2} \right] \\ B &= \frac{2\gamma}{\rho^3} \left[(n+2)(n^2-1) - \rho^2 x^2 \right]; & B' &= -2\gamma \left[(n+2)(n^2-1) - x^2 \right] \\ C &= \frac{2}{\rho^3} \left[n(n-1)(n+2) - \rho^2 \frac{x^2}{2} \right]; & C' &= -2 \left[n(n-1)(n+2) - \frac{x^2}{2} \right] \\ D &= \frac{-2\gamma x}{\rho^2} \left[n(n+1) - 2 \right]; & D' &= 2\gamma x \left[n(n+1) - 2 \right] \end{aligned}$$

b) des seize coefficients $D_{i,j}$ ($1 \leq i \leq 4$; $1 \leq j \leq 4$)

$$\begin{aligned} D_{11} &= A'C_{n,n}^1 + C'C_{n+1,n}^1; & D_{12} &= B'C_{n,n}^1 + D'C_{n+1,n}^1 \\ D_{13} &= A'C_{n,n+1}^1 + C'C_{n+1,n+1}^1; & D_{14} &= B'C_{n,n+1}^1 + D'C_{n+1,n+1}^1 \\ D_{21} &= AC_{n,n}^\gamma + BC_{n,n+1}^\gamma; & D_{22} &= AC_{n+1,n}^\gamma + BC_{n+1,n+1}^\gamma \\ D_{23} &= CC_{n,n}^\gamma + DC_{n,n+1}^\gamma; & D_{24} &= CC_{n+1,n}^\gamma + DC_{n+1,n+1}^\gamma \\ D_{31} &= A'S_{n,n}^1 + C'S_{n+1,n}^1; & D_{32} &= B'S_{n,n}^1 + D'S_{n+1,n}^1 \\ D_{33} &= A'S_{n,n+1}^1 + C'S_{n+1,n+1}^1; & D_{34} &= B'S_{n,n+1}^1 + D'S_{n+1,n+1}^1 \\ D_{41} &= AS_{n,n}^\gamma + BS_{n,n+1}^\gamma; & D_{42} &= AS_{n+1,n}^\gamma + BS_{n+1,n+1}^\gamma \\ D_{43} &= CS_{n+1,n}^\gamma + DS_{n+1,n+1}^\gamma; & D_{44} &= CS_{n+1,n}^\gamma + DS_{n+1,n+1}^\gamma \end{aligned}$$

c) des cinq coefficients :

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sum_{k=1}^4 D_{1,k} \cdot D_{4k} \\ b_{12} &= \sum_{k=1}^4 D_{1,k} \cdot D_{2k} \\ b_{21} &= \sum_{k=1}^4 D_{3,k} \cdot D_{4k} \end{aligned}$$

Δ_{13}^{34}	$\left[\begin{matrix} n^2-1 - \frac{x^2}{2} \\ n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right]$	ρx^2	$\rho x \left[\begin{matrix} n^2-1 - \frac{x^2}{2} \\ n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right]$	$x \left[\begin{matrix} n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \\ n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right]$	$T_{n,n}$
Δ_{14}^{34}	$\frac{n(n^2-1)}{2} \left[\begin{matrix} n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \\ n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right]$	$-\frac{n(n+1)}{4} \rho x^2$	$-\frac{n(n+1)}{2} \left[\begin{matrix} n^2-1 - \frac{x^2}{2} \\ n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right] \rho x$	$\frac{n(n^2-1)}{2} x$	$T_{n+1,n+1}$
Δ_{23}^{34}	$\frac{n(n^2-1)}{2} \left[\begin{matrix} n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \\ n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right]$	$-\frac{n(n+1)}{2} \rho x^2$	$\frac{n(n^2-1)}{2} \rho x$	$-\frac{n(n+1)}{2} \left[\begin{matrix} n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \\ n^2-1 - \rho \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right] x$	$T_{n,n+1}$
Δ_{24}^{34}	$\frac{n^2(n^2-1)^2}{4}$	$\frac{n^2(n+1)^2 \rho x^2}{4}$	$-\frac{n^2(n^2-1)(n+1) \rho x}{4}$	$-\frac{n^2(n^2-1)(n+1) x}{4}$	$T_{n+1,n}$

$$\Delta_{12}^{34}(x) = \frac{1}{2x} \left[(n+2)(n-1) - \frac{x^2}{2} \right] n(n+1) ; \quad \Delta_{34}^{34}(x) = \Delta_{12}^{34}(\rho x)$$

figure IV.3.B2 Les déterminants Δ_{kl}^{34} ($k \neq l$)

$$b_{22} = \sum_{k=1}^{k=4} D_{2,k} \cdot D_{3k}$$

$$b_3 = \frac{8n(n+1)}{5 \cdot 4} \left[(n-1)(n+2) - \frac{x^2}{2} \right] \left[(n-1)(n+2) - \rho^2 \frac{x^2}{2} \right]$$

l'équation aux fréquences devient :

$$\operatorname{tg}(\varepsilon \gamma x) \cdot x \left[b_{21} \operatorname{tg}(\varepsilon x) - b_{11} \right] + \left[b_{12} - b_{22} \operatorname{tg}(\varepsilon x) \right] = \frac{b_3}{\cos(\varepsilon x) \cos(\varepsilon \gamma x)} \quad (4F)$$

IV.5 - $\delta(\rho, x)$ est mal dimensionné

Les fonctions $j_n(x)$ et $y_n(x)$ sont telles qu'au voisinage de $x = 0$

$$j_n(x) \sim \frac{x^n}{(2n+1)!!} \quad \text{et} \quad y_n(x) \sim -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$$

Le déterminant $\delta(\rho, x)$ est mal dimensionné pour deux raisons principales :

1) Les colonnes $C_1(x)$ et $C_3(x)$ ont des coefficients très faibles au voisinage de $x = 0$, alors que ceux de $C_2(x)$ et $C_4(x)$ sont très grands

2) Lorsque a est peu différent de b , les lignes $\vec{L}_1$ et $\vec{L}_2$ sont pratiquement égales aux lignes L_3 et L_4

IV.6 - Résultats

Des études sur ordinateurs IBM.360 et Honey well Bull ont permis de tracer les courbes : $\varepsilon = g_n(x)$ pour un indice de vibration variant entre 0 et 5, et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ (figure (6-A) et (6-B))

a) Pour une valeur ε donnée ($\varepsilon = \frac{h}{b}$) il existe un spectre discret de valeurs x_i et la formule :

$$f_i = \frac{x_i}{2\pi b} \sqrt{\frac{G}{\rho \cdot l}}$$

$n=1$

vibrations couplées en (r, θ)

et mode rigide en translation

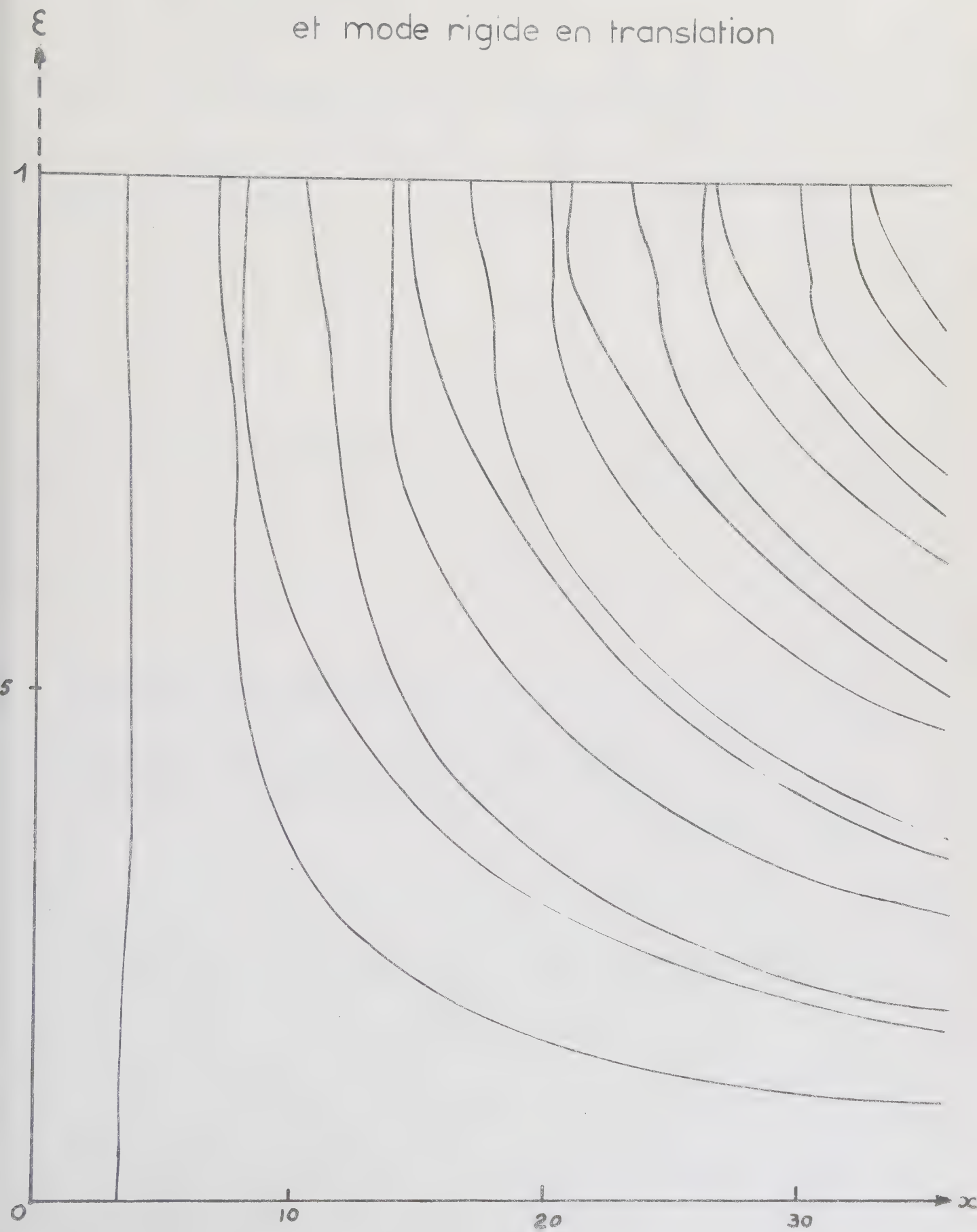


figure 1.1.10

donne les fréquences naturelles correspondantes.

G est le module d'élasticité transversal et ρ_1 la masse volumique du matériau.

Dans le cas de l'acier usuel :

$$\nu = 0,3 \quad ; \quad G = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2(1+0,3)} \quad \text{N/m}^2 \quad ; \quad \rho_1 = 7\,800 \text{ kg/m}^3$$

$$f_i = \frac{500 x_i}{b} \quad \text{Hertz}$$

(6-B)

c) Il est possible de diminuer f_i , pour une même valeur de b , en agissant sur le rapport :

$$\frac{G}{\rho_1} = \frac{E}{2(1+\nu)\rho_1}$$

d) Pour $n > 6$ la méthode directe est impossible pour chercher les valeur x_i

En effet, l'ordinateur manque alors de précision pour x voisin de zéro.

Il a été nécessaire de faire de nouveaux programmes en utilisant la relation de réccurence

$$j_{n+1} = \frac{2n+1}{x} j_n - j_{n-1} \quad (6-C)$$

et en divisant les colonnes $\vec{C}_3$ et $\vec{C}_1$ par $\epsilon\gamma x$ à chaque étape lorsque $\epsilon\gamma x < 1$, car alors le rapport :

$$\frac{1}{(\epsilon\gamma x)^n} \quad \text{est très grand.}$$

e) Il est plus intéressant d'avoir pour une valeur donnée du coefficient d'épaisseur ε le spectre du réservoir Σ correspondant (x = fonction (n))

Les figures (6-C) et (6-D) donnent des spectres de fréquence pour $\varepsilon = 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6$.

On constate que le mode le plus bas (le fondamental) varie peu avec ε

Les courbes sont moins régulières que celles qu'on obtient pour des vibrations équivolumiques.

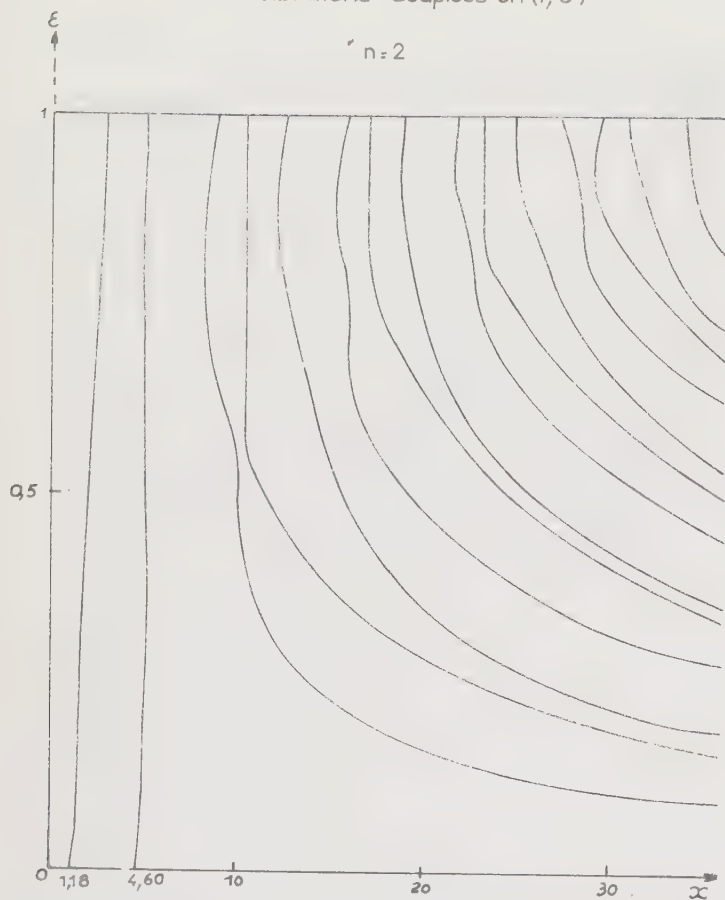
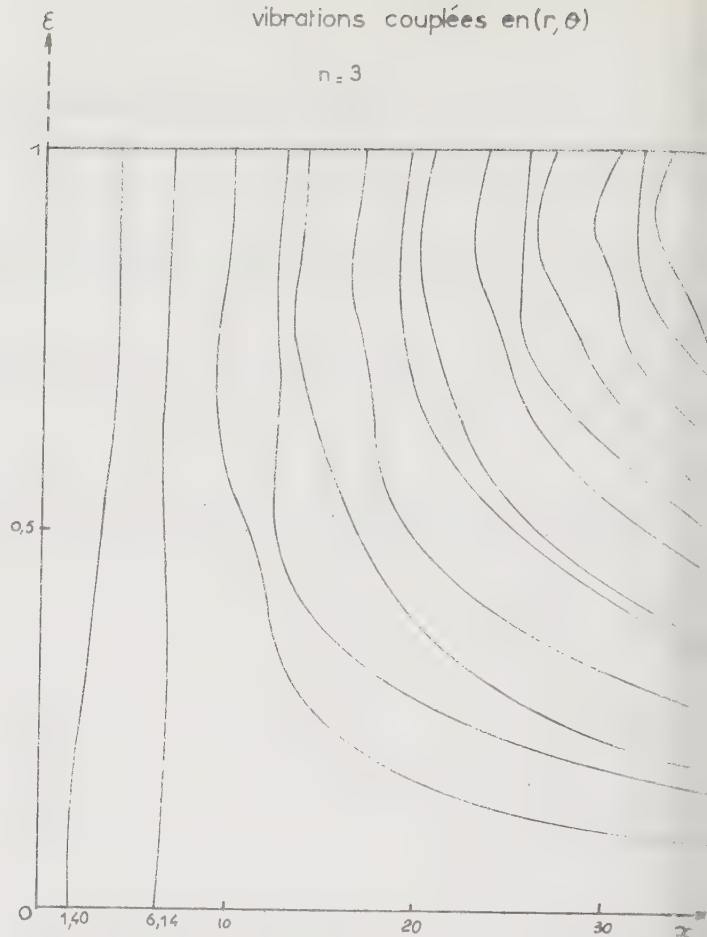
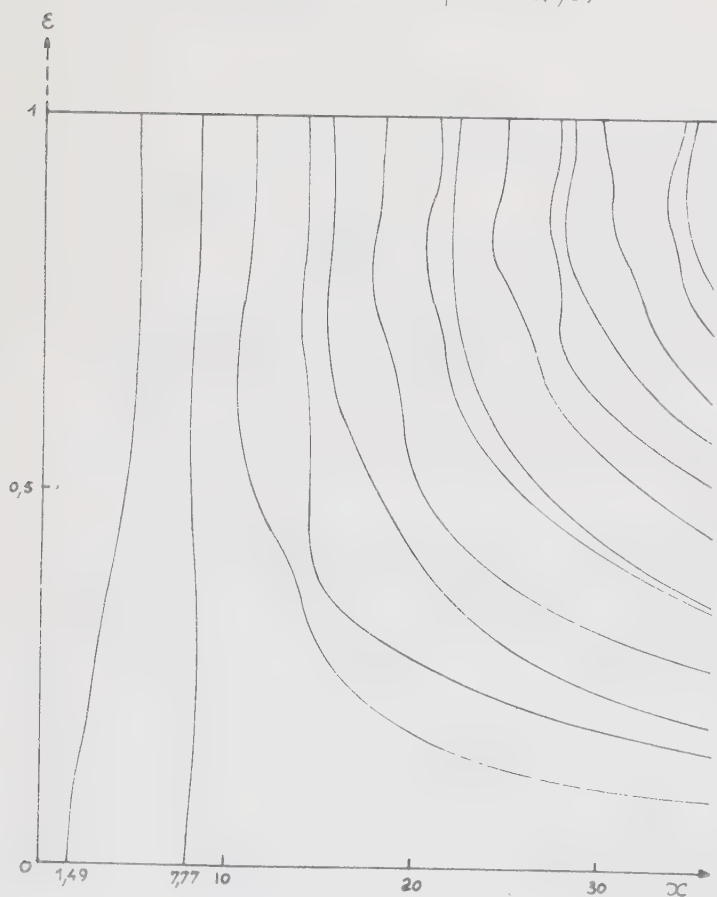
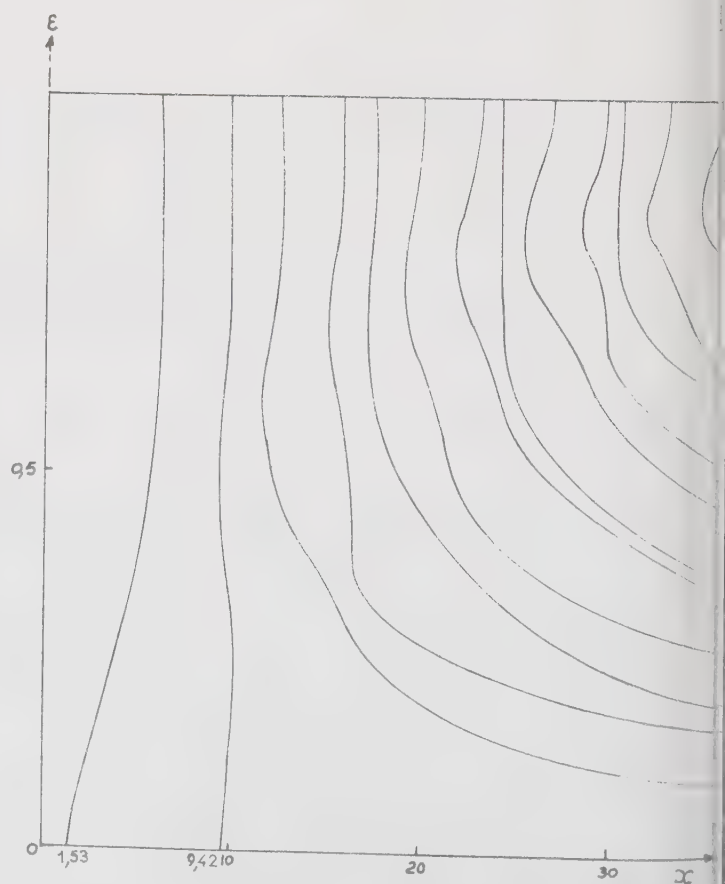
vibrations couplées en (r, θ) $n=2$ vibrations couplées en (r, θ) $n=3$  $n=4$ vibrations couplées en (r, θ)  $n=5$ vibrations couplées en (r, θ) 

figure: IV-6-B

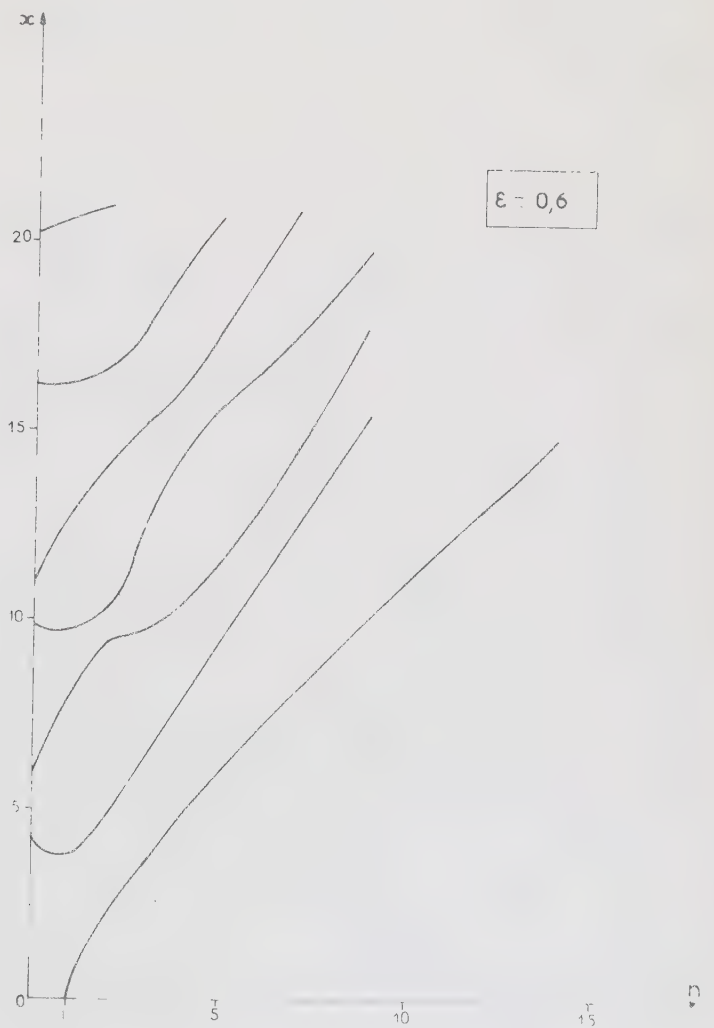
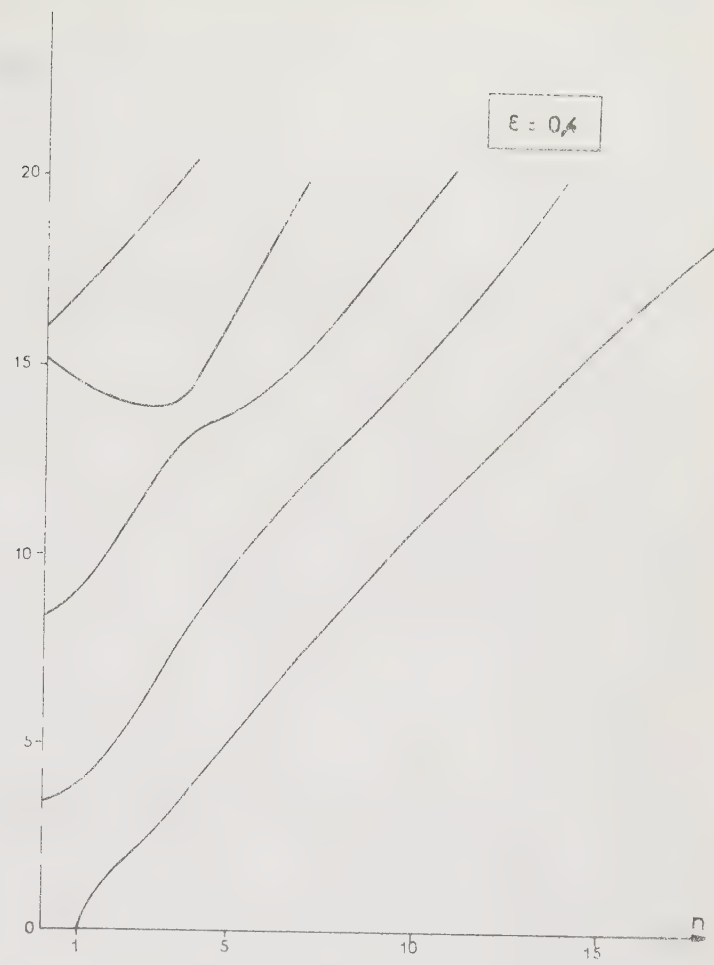
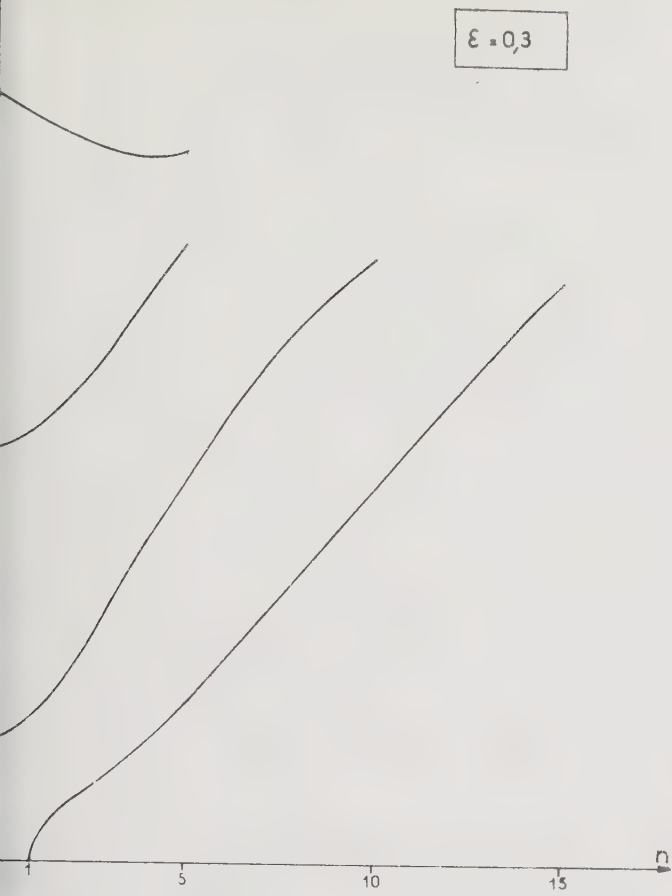
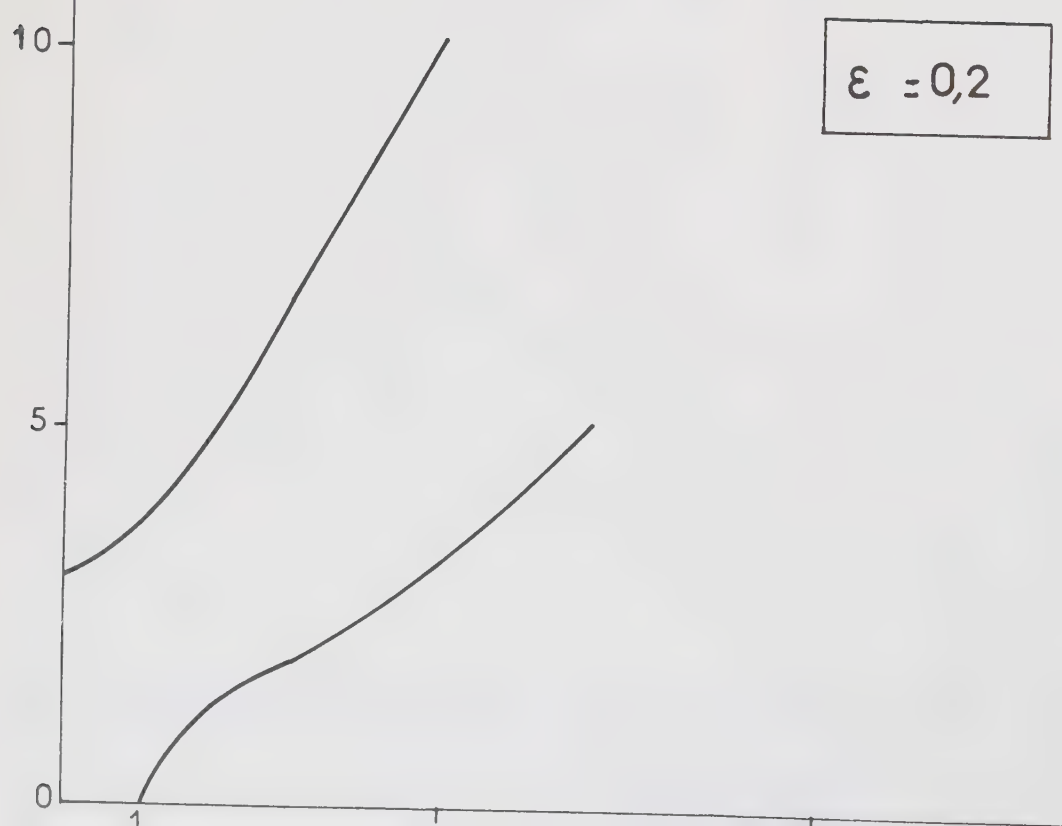
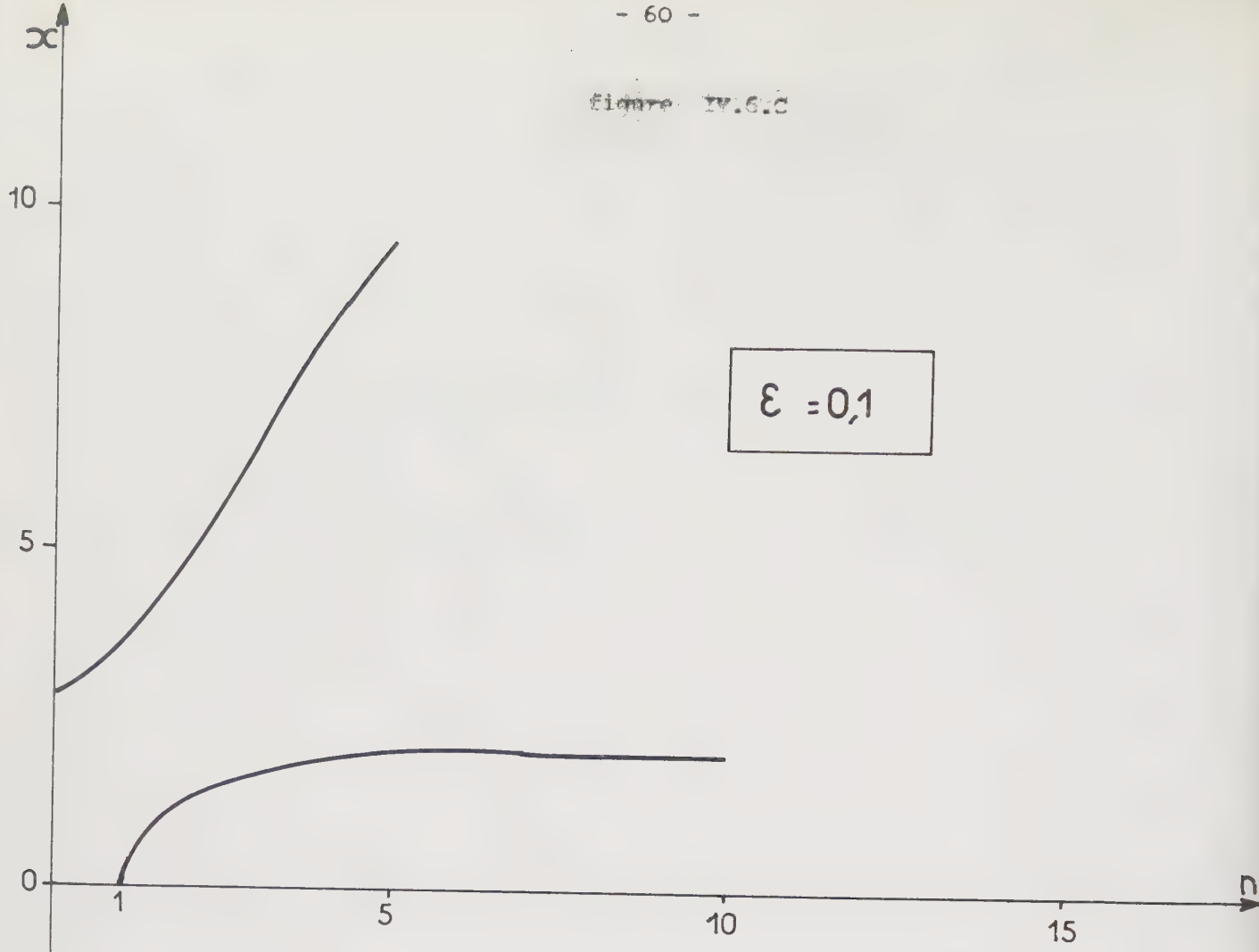


figure: IV-6-D

Figure IV.6.C



IV.7 - Fonctions propres

IV.7.1 - Rang du système (R, θ, ϕ)

a) La matrice $C(x)$ se décompose en quatre vecteurs colonnes $\vec{C}_i(x)$ ($1 \leq i \leq 4$).

$$C = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_3 & \vec{C}_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

b) $\Delta_{12}^{12}(x) = -\frac{2}{\gamma x} \left[(n+2)(n-1) - \frac{x^2}{2} \right]$ (confère figure IV.3.B1)

$$\Delta_{34}^{12}(x) = -\frac{2}{\rho \gamma x} \left[(n+2)(n-1) - \rho^2 \frac{x^2}{2} \right]$$

$$\Delta_{12}^{12}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = (n+2)(n-1)$$

$$\Delta_{34}^{12}(x) = 0 \Leftrightarrow \rho^2 \frac{x^2}{2} = (n+2)(n-1)$$

Pour $0 < \rho < 1$ les vecteurs $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$ sont indépendants quel que soit x positif.

c) De même :

$$\Delta_{12}^{34}(x) = \left[(n+2)(n-1) - \frac{x^2}{2} \right] \frac{n(n+1)}{2x}$$

(confère figure IV.3.B2)

$$\Delta_{34}^{34}(x) = \left[(n+2)(n-1) - \rho^2 \frac{x^2}{2} \right] \frac{n(n+1)}{2\rho x}$$

montre que $\vec{C}_3$ et $\vec{C}_4$ sont indépendants.

Le rang du système (R, θ, ϕ) est au moins égal à 2. Ceci $\forall x > 0$

d) Des études sur ordinateur ont montré que le rang du système (R, θ, ϕ) est égal à 3 pour les fréquences x_i . (Le déterminant $\Delta_{123}^{123}(x_i)$ d'ordre 3 est toujours différent de zéro).

IV.7.2 - Résolution de (R, θ, ϕ)

Deux méthodes ont été appliquées. Elles ont donné des résultats concordants.

a) Dire que $C(x_i) \vec{W} = \vec{0}$, c'est équivalent à dire que $\vec{W}(x_i)$ est vecteur propre de C associé à la valeur propre $\lambda(x_i) = 0$

Le programme EIGENP donne les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice réelle quelconque.

b) On peut aussi chercher les composantes de $\vec{W}(x_i)$ par une méthode analytique.

Comme $\Delta^{123}_{123}(x_i) \neq 0$, un vecteur propre $\vec{W}$ possible est, en appliquant les formules de CRAMER :

$$W_1 = -\frac{2}{\beta} \begin{bmatrix} : & : \\ \vec{C}_2 & : & : & \vec{C}_4 \\ : & : & : & : \\ : & : & : & : \end{bmatrix} \quad A1$$

$$W_2 = \frac{2}{\beta} \begin{bmatrix} : & : \\ \vec{C}_1 & : & : & \vec{C}_4 \\ : & : & : & : \\ : & : & : & : \end{bmatrix} \quad A2$$

$$W_3 = - \begin{bmatrix} : & : \\ \vec{C}_1 & : & : & \vec{C}_4 \\ : & : & : & : \\ : & : & : & : \end{bmatrix} \quad A3$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} : & : \\ \vec{C}_1 & : & : & \vec{C}_3 \\ : & : & : & : \\ : & : & : & : \end{bmatrix} \quad A4$$

(7-A)

Remarques :

1 - Le facteur $\frac{2}{\beta}$ a été introduit car dans : "IV.2 : Mise sous forme adimensionnelle", les colonnes initiales 3 et 4 de $C(x)$ ont été multipliées par $\frac{\beta}{2}$

2 - $\vec{C}_i$ désigne ici le vecteur $\vec{C}_i$ avec ses trois premières composantes C_{1i}, C_{2i}, C_{3i} .

3 - W_1 et W_2 (respectivement W_3 et W_4) sont obtenus en développant le déterminant (3,3) correspondant suivant la première colonne (respectivement la troisième colonne).

On obtient :

$$W_1 = -\frac{2}{\beta} \left[F_1 Y_n(\gamma x) + F_2 Y_{n+1}(\gamma x) + F'_1 Y_n(\rho \gamma x) + F'_2 Y_{n+1}(\rho \gamma x) \right] \quad B1$$

$$W_2 = \frac{2}{\beta} \left[F_1 j_n(\gamma x) + F_2 j_{n+1}(\gamma x) + F'_1 j_n(\rho \gamma x) + F'_2 j_{n+1}(\rho \gamma x) \right] \quad B2$$

(7-E)

$$W_3 = - \left[F_3 Y_n(x) + F_4 Y_{n+1}(x) + F'_3 Y_n(\rho x) + F'_4 Y_{n+1}(\rho x) \right] \quad B3$$

$$W_4 = \left[F_4 j_n(x) + F_4 j_{n+1}(x) + F'_3 j_n(\rho x) + F'_4 j_{n+1}(\rho x) \right] \quad B4$$

avec :

$$F_1 = 2(n-1) \Delta_{23}^{34} - \left[n(n-1) - \frac{x^2}{2} \right] \Delta_{13}^{34}$$

$$F_2 = -2\gamma x \left[\Delta_{23}^{34} + \Delta_{13}^{34} \right]$$

$$F_3 = \left[n^2 - 1 - \frac{x^2}{2} \right] \Delta_{23}^{12} - \frac{n(n^2-1)}{2} \Delta_{13}^{12}$$

$$F_4 = x \left[\Delta_{23}^{12} + \frac{n(n+1)}{2} \Delta_{13}^{12} \right]$$

$$U(x) = W_1 \left(G_1 j_n(\gamma x) + G_2 j_{n+1}(\gamma x) \right) + W_2 \left(G_1 y_n(\gamma x) + G_2 y_{n+1}(\gamma x) \right)$$

$$+ W_3 \left(G_3 j_n(x) + G_4 j_{n+1}(x) \right) + W_4 \left(G_3 y_n(x) + G_4 y_{n+1}(x) \right)$$

$$V(x) = W_1 \left(G_5 j_n(\gamma x) + G_6 j_{n+1}(\gamma x) \right) + W_2 \left(G_5 y_n(\gamma x) + G_6 y_{n+1}(\gamma x) \right)$$

$$+ W_3 \left(G_7 j_n(x) + G_8 j_{n+1}(x) \right) + W_4 \left(G_7 y_n(x) + G_8 y_{n+1}(x) \right)$$

avec :

$$G_1 = \frac{2n}{x} \quad G_2 = -2\gamma \quad G_3 = \frac{n(n+1)}{x} \quad G_4 = 0$$

$$G_5 = \frac{2}{x} \quad G_6 = 0 \quad G_7 = \frac{n+1}{x} \quad G_8 = -1$$

LES PARTIES RADIALES DES DEPLACEMENTS u ET v.

$$F'_1 = 2 (n - 1) \Delta_{12}^{34} ; F'_2 = - 2 \rho \gamma x \Delta_{12}^{34}$$

$$F'_3 = \left[n^2 - 1 - \frac{\rho^2 x^2}{2} \right] \Delta_{12}^{12} ; F'_4 = \rho x \Delta_{12}^{12}$$

Les déterminants Δ_{ij}^{kl} ont déjà été calculés (figure IV.3.B)

IV.7.3 - Les déplacements pour $r = b$

a) Pour un réservoir, les seuls déplacements réellement mesurables sont les déplacements de la surface extérieure $r = b$.

Le déplacement $\vec{\xi}$ (confère IV.1.B) est de la forme :

$$u = U(x_i) P_n^m (\cos \theta) \cos m \phi$$

$$v = V(x_i) \frac{d}{d\theta} P_n^m (\cos \theta) \cos m \phi \quad (7-C)$$

$$w = - m V(x_i) \frac{P_n^m (\cos \theta)}{\sin \theta} \sin m \phi$$

La figure (IV.7.A) donne $U(x_i)$ et $V(x_i)$.

b) Si on tient compte de $j_n(x) y_{n+1}(x) - y_n(x) j_{n+1}(x) = - \frac{1}{x^2}$ alors $U(x_i)$ et $V(x_i)$ sont une combinaison linéaire de fonctions $T_{n,m}(x)$ et $T_{n,m}^{\gamma}(x)$

Nous savons que $\frac{W(x_i)}{V(x_i)} = - m$; il est donc important de connaître le rapport $\frac{U}{V}$

Dans le cas axisymétrique ($m = 0$) on peut prendre :

$$\begin{cases} u = \frac{U(x)}{V(x)} P_n (\cos \theta) \\ v = - P_n^1 (\cos \theta) \\ w = 0 \end{cases} \quad (7-D)$$

En général ($m \geq 1$) :

$$u = \frac{U}{V} P_n^m (\cos \theta) \cos m \phi$$

$$v = \frac{d}{d\theta} P_n^m (\cos \theta) \cos m \phi \quad (7-D)$$

$$w = -m \frac{P_n^m (\cos \theta)}{\sin \theta} \sin m \phi$$

$$C_{i,j}^o = C_{ij} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$C_{31}^o = \frac{d}{dx} C_{11} = \frac{2}{x} \left[n(n-1) - \gamma^2 x^2 \right] j_n(\gamma x) + 4\gamma j_{n+1}(\gamma x)$$

$$C_{32}^o = \frac{d}{dx} C_{12} = \frac{2}{x} \left[n(n-1) - \gamma^2 x^2 \right] y_n(\gamma x) + 4\gamma y_{n+1}(\gamma x)$$

$$C_{33}^o = \frac{d}{dx} C_{13} = \frac{n}{2x} \left[2(n^2 - 1) - x^2 \right] j_n(x) + \left[\frac{x^2 - 2n(n+1)}{2} \right] j_{n+1}(x)$$

$$C_{34}^o = \frac{d}{dx} C_{14} = \frac{n}{2x} \left[2(n^2 - 1) - x^2 \right] y_n(x) + \left[\frac{x^2 - 2n(n+1)}{2} \right] y_{n+1}(x)$$

$$C_{41}^o = \frac{d}{dx} C_{21} = \left[\frac{2n^2(n-1) + x^2(4\gamma^2 - 2 - n)}{2x} \right] j_n(\gamma x) + \frac{\gamma}{2} \left[x^2 - 2(n^2 + n + 2) \right] j_{n+1}(\gamma x)$$

$$C_{42}^o = \frac{d}{dx} C_{22} = \left[\frac{2n^2(n-1) + x^2(4\gamma^2 - 2 - n)}{2x} \right] y_n(\gamma x) + \frac{\gamma}{2} \left[x^2 - 2(n^2 + n + 2) \right] y_{n+1}(\gamma x)$$

$$C_{43}^o = \frac{d}{dx} C_{23} = \frac{n(n+1)}{2x} \left[n(n-1) - x^2 \right] j_n(x) + n(n+1) j_{n+1}(x)$$

$$C_{44}^o = \frac{d}{dx} C_{24} = \frac{n(n+1)}{2x} \left[n(n-1) - x^2 \right] y_n(x) + n(n+1) y_{n+1}(x)$$

IV.8 - Membrane

IV.8.1 - Lorsque le rayon intérieur a du réservoir $\Sigma(a,b)$ tend vers le rayon extérieur $r = b$, on obtient à la limite une membrane ($\varepsilon = 0$)

Pour $\varepsilon = 0$, les lignes L_1 (respectivement L_2) et L_3 (respectivement L_4) sont identiques dans la matrice C (figure IV.2.A)

Lorsque $a \rightarrow b^-$, on doit avoir :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = 0 \quad \text{pour } r = a \quad \text{et } r = b$$

Si nous supposons que la contrainte $\vec{\phi}_r$ reste bornée, on obtient :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = 0$$

$$r = b = a \quad (8-A)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{d\sigma_{r\theta}}{dr} = \frac{d\sigma_{r\phi}}{dr} = 0$$

c'est à dire un système linéaire homogène :

$$\begin{bmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \\ \frac{dL_1(x)}{dx} \\ \frac{dL_2(x)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (B1)$$

(8-B)

dont le déterminant est δ^0 , formé des deux premières lignes de C et de leurs dérivées premières. Pour obtenir des solutions W_i non toutes nulles, il faut et il suffit que :

$$\delta^0 = 0 \quad (B2)$$

(8-B2) donne l'équation aux fréquences de la membrane

$$\Delta_{12}^{12} = \gamma x \left[2 (n-1) (n+2) - x^2 \right]$$

$$\Delta_{34}^{34} = \frac{n(n+1)}{4x} \left[2n(n^2-1)(n+2) - 3nx^2(n+1) + x^4 \right]$$

$$\Delta_{13}^{12} = 4\gamma \left[(n-1)(n+2) - \gamma^2 x^2 \right]$$

$$\Delta_{24}^{34} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \left[(n-1)(n+2) - x^2 \right]$$

$$\Delta_{14}^{12} = \gamma \left[-2(n+2)(n-1) + x^2(4\gamma^2 - 3) \right]$$

$$\Delta_{23}^{34} = -\frac{n(n+1)}{4} x^2$$

$$\Delta_{23}^{12} = 2\gamma \left[2\gamma^2 - 1 \right] x^2$$

$$\Delta_{14}^{34} = \frac{n(n^2-1)(n+2)}{2}$$

$$\Delta_{24}^{12} = \frac{\gamma}{4} \left[-4n(n^2-1)(n+2) + 4x^2(n^2+n+3-4\gamma^2) - x^4 \right]$$

$$\Delta_{13}^{34} = \frac{1}{4} \left[-4n(n^2-1)(n+2) + 2x^2(2n^2+2n-1) - x^4 \right]$$

$$\Delta_{34}^{12} = \frac{\gamma}{x} \left[-2n(n^2-1)(n+2) + x^2 \left[n^2+n+4+2(n-1)(n+2)\gamma^2 \right] - \gamma^2 x^4 \right]$$

$$\Delta_{12}^{34} = -\frac{n(n+1)x}{4} \left[2(n-1)(n+2) - x^2 \right]$$

IV.8.2 - Equation aux fréquences

En tenant compte des formules sur les fonctions de Bessel (Annexe I)

$$a) \text{ (VIII.1.E) : } \frac{df_n}{dx} = \frac{n}{x} f_n - f_{n+1}$$

$$\frac{df_{n+1}}{dx} = f_n - \frac{(n+2)}{x} f_{n+1}$$

$$b) \quad \frac{d}{dx} \left[A_1(x) f_n(x) + B_1(x) f_{n+1}(x) \right] =$$

$$\left[\frac{dA_1}{dx} + \frac{n}{x} A_1 + B_1 \right] f_n(x) + \left[\frac{dB_1}{dx} - A_1 - \frac{(n+2)}{x} B_1 \right] f_{n+1}$$

On obtient une nouvelle matrice C^O (figure 8-A)

On remarque que :

$$C_{i,1}^O = F_{i,1} j_n(\gamma x) + F_{i,2} j_{n+1}(\gamma x)$$

$$C_{i,2}^O = F_{i,1} Y_n(\gamma x) + F_{i,2} Y_{n+1}(\gamma x)$$

$$1 \leq i \leq 4$$

$$C_{i,3}^O = F_{i,3} j_n(x) + F_{i,4} j_{n+1}(x)$$

$$C_{i,4}^O = F_{i,3} Y_n(x) + F_{i,4} Y_{n+1}(x)$$

On peut appliquer le théorème de Laplace (confère V.3.A)

$$\delta^O = \begin{vmatrix} 12 & 34 \\ 12 & 34 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 34 \\ 13 & 24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 34 \\ 14 & 23 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 34 \\ 23 & 14 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 34 \\ 24 & 13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 34 \\ 34 & 12 \end{vmatrix}$$

$2 (n - 1)$	$- 2 \gamma x$	$n^2 - 1 - \frac{x^2}{2}$	x
$n (n - 1) - \frac{x^2}{2}$	$2 \gamma x$	$\frac{n (n^2 - 1)}{2}$	$-\frac{n (n + 1)}{2} x$
$\frac{2}{x} \left[n(n - 1) - \gamma^2 \frac{x^2}{2} \right]$	4γ	$\frac{n}{2x} \left[2(n^2 - 1) - x^2 \right]$	$\left[\frac{x^2 - 2n (n + 1)}{2} \right]$
$\frac{2n^2 (n - 1) + x^2 (4\gamma^2 - 2 - n)}{2x}$	$\frac{\gamma}{2} \left[x^2 - 2(n^2 + n + 2) \right]$	$\frac{n (n + 1)}{2x} \left[n (n - 1) - x^2 \right]$	$n (n + 1)$

$$s^O = \frac{1}{\gamma x} \frac{24}{2}$$

figure IV.8.C

$$\Delta_{34}^{12} \cdot \Delta_{34}^{34} = \frac{n(n+1)\gamma}{4} \left[4n(n-1)(n^2-1)(n+2)^2 - 8n(n^2-1)(n+2)x^2 + (5n^2+5n-4)x^4 - x^6 \right]$$

$$\Delta_{13}^{12} \cdot \Delta_{24}^{34} = \gamma n^2 (n+1)^2 \left[(n-1)^2 (n+2)^2 - x^2 (n-1)(n+2)(\gamma^2+1) + \gamma^2 x^4 \right]$$

$$\Delta_{14}^{12} \cdot \Delta_{23}^{34} = -\frac{n(n+1)}{4} \gamma x^2 \left[-2(n-1)(n+2) + x^2(4\gamma^2-3) \right]$$

$$\Delta_{23}^{12} \cdot \Delta_{14}^{34} = n(n^2-1)(n+2)\gamma(2\gamma^2-1)x^2$$

$$\begin{aligned} \Delta_{24}^{12} \cdot \Delta_{13}^{34} = \frac{\gamma}{16} & \left[16n^2(n^2-1)^2(n+2)^2 - 8n(n^2-1)(n+2)x^2(4n^2+4n+5-8\gamma^2) \right. \\ & + 8x^4 \left[n(n^2-1)(n+2) + (n^2+n+3-4\gamma^2)(2n^2+2n-1) \right] \\ & \left. + x^6 \left[-8n^2-8n-10+16\gamma^2 \right] + x^8 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{34}^{12} \cdot \Delta_{12}^{34} = -\frac{n(n+1)\gamma}{4} & \left[-4n(n-1)(n^2-1)(n+2)^2 + 4(n-1)(n+2)x^2(n^2+n+2+\gamma^2(n^2+n-2)) \right. \\ & \left. + x^4(n^2+n+4) + \gamma^2 x^6 \right] \end{aligned}$$

figure IV.8.D : Produits $\Delta_{kl}^{12} \Delta_{ij}^{34}$

Les déterminants Δ_{kl}^{ij} sont calculés en tenant compte de :

$$a) \quad j_n(x) y_{n+1}(x) - j_{n+1}(x) y_n(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} G_1 j_n(x) + G_2 j_{n+1}(x) & -G_2 y_n(x) + G_1 y_{n+1}(x) \\ G_3 j_n(x) + G_4 j_{n+1}(x) & -G_4 y_n(x) + G_3 y_{n+1}(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix}$$

La figure (8-B) donne un résumé du calcul des douze déterminants Δ_{kl}^{ij}

Par conséquent :

$$\delta^0 = \frac{1}{\gamma^2 x^4} \det |F_{i,j}| \quad (\text{figure IV.8.C}) \quad (8-C)$$

La figure (8-D) donne un résumé du calcul des six produits $\Delta_{kl}^{12} \Delta_{ij}^{34}$

Les termes constants et en x^2 s'annulent

On obtient ainsi une équation bicarrée :

$$-(1-\nu)x^4 + 2[1+3\nu + n(n+1)]x^2 + 4(1+\nu)[2 - n(n+1)] = 0 \quad (8-D)$$

L'équation (8-D) a été obtenue par (1), pour une coque peu épaisse dans laquelle on négligeait les moments de flexion.

IV.8.3 - Existence de deux modes de vibrations

Le déterminant de (8-D) est :

$$\delta_1 = [1 + 3\nu + n(n+1)]^2 - 4(1-\nu^2)[n(n+1) - 2]$$

$$1^{er} \text{ mode: } a_n^2 = \frac{1+3V+n(n+1) - \sqrt{(1+3V+n(n+1))^2 - 4(1+V^2)(n(n+1)-2)}}{1-V}$$

pour $V = 0,3$ et n variant de 0 à 20

dizaines n unités	0	1
0		1,5904
1	0	1,5941
2	1,1848	1,5969
3	1,4029	1,5992
4	1,4884	1,6009
5	1,5305	1,6024
6	1,5542	1,6036
7	1,5689	1,6046
8	1,5787	1,6054
9	1,5855	1,6061

En posant $X = n(n+1) > 0$ δ_1 se transforme en :

$$\delta_1 = x^2 + 2x (1 + 3v - 2(1-v^2)) + (1+3v)^2 + 8(1-v^2) > 0$$

Pour chaque valeur de $n \geq 1$, il existe deux valeurs a_n et b_n telles que :

$$a_n^2 = \frac{1 + 3v + n(n+1) + \sqrt{(1 + 3v + n(n+1))^2 - 4(1-v^2)(n(n+1) - 2)}}{1 - v} \quad (8-E)$$

Les tableaux des figures (8-E) et (8-F) donnent les valeurs a_n et b_n ($a_n < b_n$) des fréquences pour $1 \leq n \leq 20$

a) Il existe deux modes dans le cas d'une membrane a qui est conforme aux résultats de (1) et (7)

b) Lorsque $n \rightarrow +\infty$ $\delta_1 \sim n(n+1)$

d'où :

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1 + 3v}{1 - v}} \quad (8-F)$$

pour $v = 0,3$:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,64$$

Dans le cas $n = 1$: $a_1 = 0$. On obtient le mode rigide (translation d'ensemble). Le mode (fa_n) est tracé figure (8-G).

c) Lorsque $n \rightarrow +\infty$: $b_n \rightarrow +\infty$ avec une branche parabolique.

$$2^{\text{ème}} \text{ mode } b_n^2 = \frac{1+3V+n(n+1)+\sqrt{(1+3V+n(n+1))^2-4(1-V^2)(n(n+1)-2)}}{1-V}$$

pour $V = 0,3$ et n variant de 0 à 20

dizaines n unités	0	1
0	3,33	17,81
1	3,34	19,49
2	4,60	21,18
3	6,14	22,87
4	7,77	24,55
5	9,42	26,24
6	11,09	27,93
7	12,77	29,61
8	14,44	31,30
9	16,13	32,99

IV.8.4 - Les déformées d'une membrane

Ce sous chapitre utilise les résultats du sous chapitre IV.7.2

Soit x_i une fréquence propre de $\Sigma(a,b)$. Comme $\Delta_{123}^{123}(x_i) \neq 0$
un vecteur propre $\vec{W}(x_i)$ possible est en appliquant les formules de CRAMER
(confère IV.7.A)

$$\begin{aligned} W_1 &= - \frac{2}{\beta} \begin{vmatrix} \vec{C}_2 & \vec{C}_3 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_3 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_3 \end{vmatrix} \\ W_2 &= \frac{2}{\beta} \begin{vmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_3 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_3 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_3 \end{vmatrix} \\ W_3 &= - \begin{vmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_3 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_3 \end{vmatrix} \\ \vec{W}_4 &= \begin{vmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_3 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_3 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_4 \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8-G)$$

On obtient :

$$W_1 = - (E_1 y_n(\gamma n) + E_1 y_{n+1}(\gamma x)) \quad H1$$

$$W_2 = E_1 j_n(\gamma x) + E_2 j_{n+1}(\gamma x) \quad H2$$

$$W_3 = - (E_3 y_n(x) + E_3 y_{n+1}(x)) \quad H3$$

$$W_3 = E_3 j_n(x) + E_3 j_{n+1}(x) \quad H4$$

(8-H)

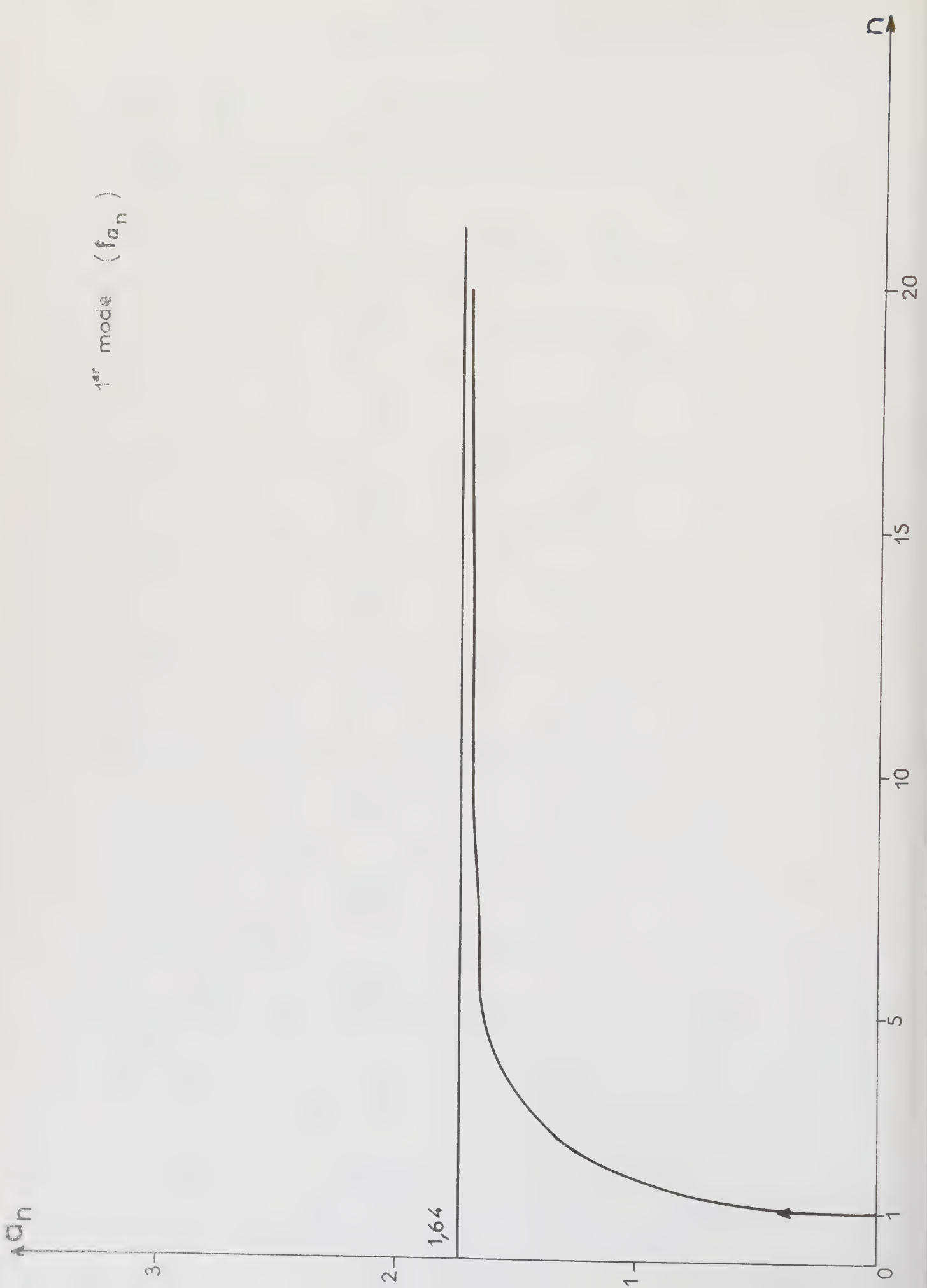
avec :

$$E_1 = 2(n-1) \Delta_{23}^{34} - \left[n(n-1) - \frac{x^2}{2} \right] \Delta_{13}^{34} + F_{3,1} \Delta_{12}^{34}$$

$$E_2 = - 2 \gamma x \left[\Delta_{23}^{34} + \Delta_{13}^{34} \right] + F_{3,2} \Delta_{12}^{34}$$

$$E_3 = \left[n^2 - 1 - \frac{x^2}{2} \right] \Delta_{13}^{12} - \frac{n(n^2 - 1)}{2} \Delta_{23}^{12} + F_{3,3} \Delta_{12}^{12}$$

1^{er} mode (f_{a_n})



$$E_4 = x \Delta_{23}^{12} + \frac{n(n+1)}{2} x \Delta_{23}^{12} + F_{3,4} \Delta_{12}^{12}$$

Les déterminants sont ceux de la figure IV.8.B.

Le déplacement à la surface vaut :

$$u = U(x_i) P_n^m(\cos\theta) \cos m \phi$$

$$v = V(x_i) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \cos m \phi$$

$$w = -m V(x_i) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin m \phi$$

Après calculs :

$$\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{1 - \nu - n(n+1) + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) x^2}{1 + \nu}$$

qui est l'expression obtenue par (1) dans une théorie de la coque sphérique (on suppose alors que les moments de flexion sont nuls).

Les déformées sont été calculées (figure 8-H) pour $m = 0$ et le déplacement ξ pris sous la forme :

$$u = \frac{U(x)}{V(x)} P_n(\cos\theta)$$

$$v = -P_n^1(\cos\theta)$$

$$w = 0$$

IV-9 - CONCLUSIONS

Les vibrations (R, Θ, Φ) sont les plus générales du réservoir sphérique. Elles ont lieu pour un indice de vibration $n \gg 1$.

L'équation aux fréquences obtenues est du type :

Des courbes de fréquence $x = g_n(\epsilon)$ ont été tracées. Il n'a pas été possible de découvrir une construction géométrique simple permettant d'obtenir les courbes de fréquence à partir de l'une d'entre elles.

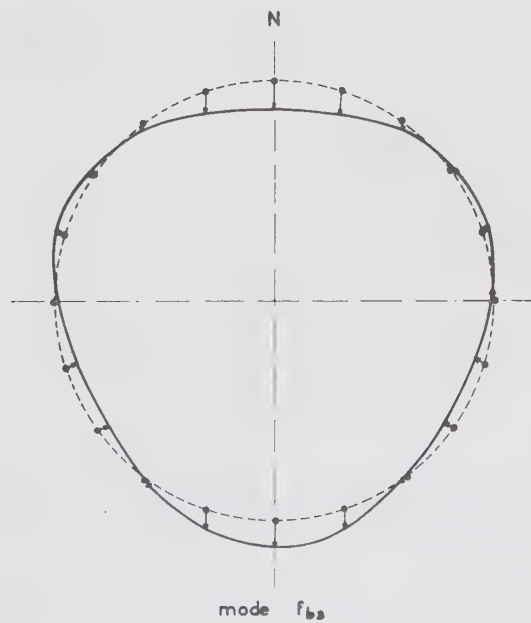
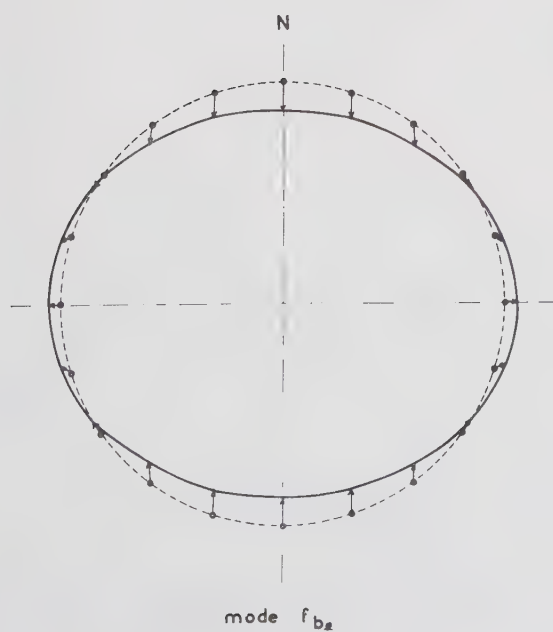
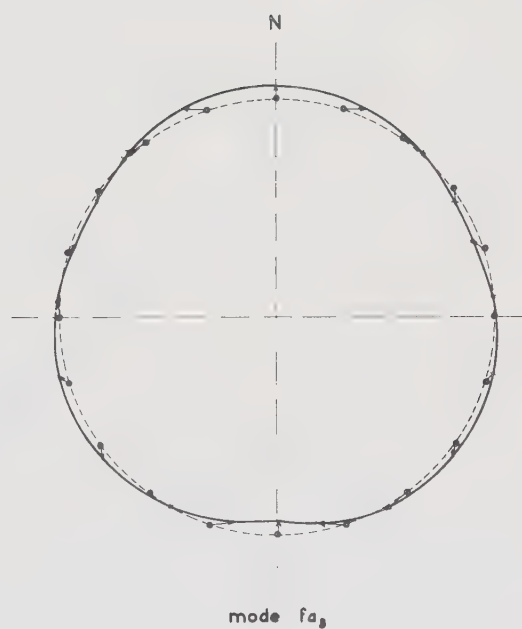
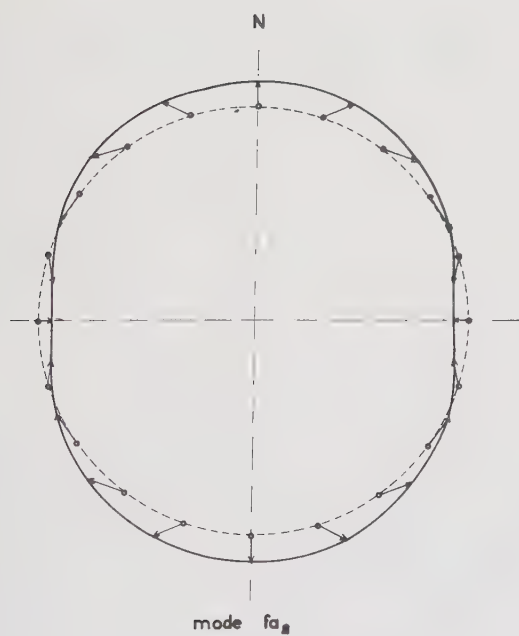
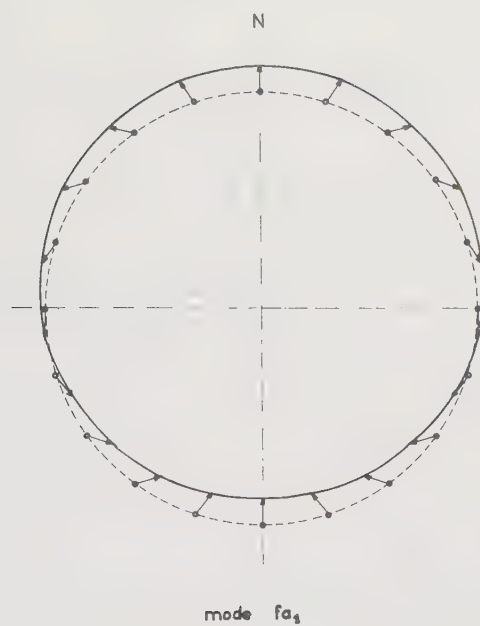
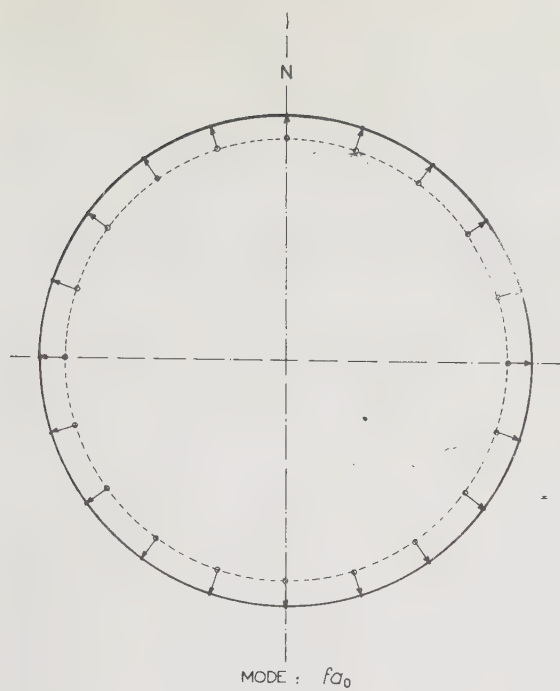
Pour une membrane ($\epsilon = 0$) il existe 2 modes a_n et b_n ($a_n < b_n$) pour chaque valeur de n :

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \frac{1+3\nu + n(n+1) \pm \sqrt{(1 + 3\nu + n(n+1))^2 - 4(1-\nu^2)(n(n+1)-2)}}{1-\nu} \\ b_n^2 & \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini a_n tend vers $\sqrt{\frac{1+3\nu}{1-\nu}}$. Il y a une accumulation de fréquences.

Pour $n = 1$, $b_1 = 0$ est le mode de translation.

Les déformées correspondantes ont été tracées pour les premières valeurs de n .



V- Vibrations équivolumiques

Ces vibrations sont caractérisées par le fait qu'il n'y a pas de déplacement radial ($u = 0$)

V.1 - Equation aux fréquences

Le système $(\Theta \Phi)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ C_1(\rho x) & C_2(\rho x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait une solution non nulle est que :

$$\delta(\rho, x) = \begin{vmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ C_1(\rho x) & C_2(\rho x) \end{vmatrix} = 0 \quad (1-A)$$

$$\text{avec} \quad C_1(x) = \frac{(n-1)}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x)$$

$$C_2(x) = \frac{(n-1)}{x} y_n(x) - y_{n+1}(x)$$

$$\text{en rappelant que} \quad j_n(x) = A_n(x) \cos x + B_n(x) \sin x$$

(1-A) est l'équation aux fréquences propres.

Si nous posons :

$$\psi_1(x) = \frac{(n-1)}{x} A_n - A_{n+1} \quad ; \quad \psi_2(x) = B_n \frac{(n-1)}{x} - B_{n+1}$$

$$\psi_1(\rho x) = \frac{n-1}{\rho x} A_n^\rho - A_{n+1}^\rho = \psi_3(x) \quad ; \quad \psi_2(\rho x) = \frac{(n-1)}{\rho x} B_n^\rho - B_{n+1}^\rho = \psi_4(x)$$

$$\text{soit : } (-\psi_1 \psi_4 + \psi_2 \psi_3) \cos(\rho-1)x + (\psi_2 \psi_4 + \psi_1 \psi_3) \sin(\rho-1)x = 0$$

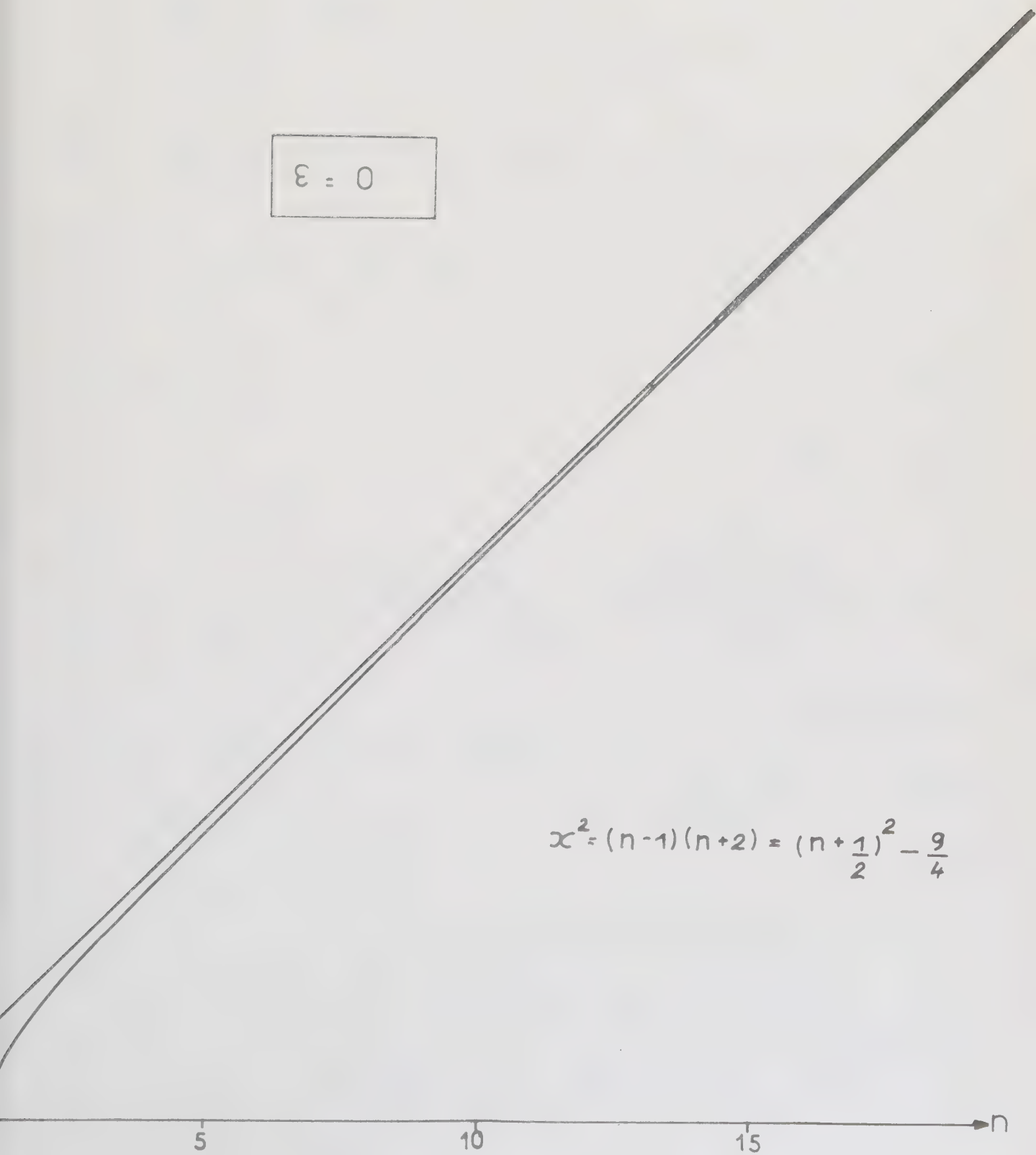


figure V.2.A

$$\underline{\text{tg } \epsilon x} = - \frac{(\psi_1 \psi_4 - \psi_2 \psi_3)}{\psi_2 \psi_4 + \psi_1 \psi_3} = \frac{\frac{\psi_2}{\psi_1} - \frac{\psi_4}{\psi_3}}{1 + \frac{\psi_2}{\psi_3} \cdot \frac{\psi_4}{\psi_3}} = \text{tg } (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\text{où } \text{tg } \alpha_1 = \frac{\psi_2}{\psi_1} \quad \text{et } \text{tg } \alpha_2 = \frac{\psi_4}{\psi_3}$$

soit

$$\boxed{\epsilon x = \alpha_1 - \alpha_2 + k \pi}$$

(1-B)

V.1.1 - Cas particulier n = 1

$$\psi_1 = -A_2 = \frac{3}{x} \quad ; \quad \psi_2 = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{x^2 - 3}{3} = \frac{x^2}{3} - 1$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{\rho^2 x^2 - 3}{3}$$

$$\text{tg } \epsilon x = \frac{\frac{(x^2 - 3)}{3} - \frac{(\rho^2 x^2 - 3)}{3}}{1 + \frac{(\rho^2 x^2 - 3)}{3} \cdot \frac{(x^2 - 3)}{3}} = \frac{3 x^2 (1 - \rho^2)}{3 + (\rho^2 x^2 - 3)(x^2 - 3)}$$

qui est du type :

$$\frac{\text{tg } \epsilon x}{\epsilon x} = \frac{3 x^2 (1 + \rho)}{3 + (\rho^2 x^2 - 3)(x^2 - 3)} \quad (1-C)$$

V.2 - Membrane sphérique (h = 0)

Lorsque $a \rightarrow b^-$ on a $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = 0$ pour $r = a$ et $r = b$

$$\text{donc } \frac{d \sigma_{r\theta}}{dr} = \frac{d \sigma_{r\phi}}{dr} = 0 \quad \text{pour } r = a \quad \text{et } r = b$$

Sachant que $\sigma_{r\theta} = -m \sigma_{r\phi}$

on obtient :

$$\begin{vmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ \frac{dC_1}{dx} & \frac{dC_2}{dx} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{(n-1)}{x^2} j_n(x) + \frac{(n-1)}{x} \left(\frac{n}{x} j_n - j_{n+1} \right) - \left(j_n - \frac{(n+2)}{x} j_{n+1} \right)$$

$$\frac{dC_1}{dx} = + \left(-\frac{(n-1)^2}{x^2} + 1 \right) j_n(x) + \frac{(n+3)}{x} j_{n+1} = G_3(x) j_n(x) + G_4(x) j_{n+1}(x)$$

$$\frac{dC_2}{dx} = -G_2(x) j_n(x) + G_1(x) j_{n+1}$$

$$\begin{vmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ \frac{dC_1}{dx} & \frac{dC_2}{dx} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} G_1(x) & G_2(x) \\ G_3(x) & G_4(x) \end{vmatrix}$$

soit $\frac{(n-1)}{x_0} \frac{(3)}{x_0} - \left[1 - \frac{(n-1)^2}{x_0^2} \right] = 0$

$$\boxed{x_0^2 = (n-1)(n+2)}$$

(2-B)

Pour $n = 1$ $x_0 = 0$, on obtient le mode rigide (rotation).

La courbe $C_n^2 = f(n) = (n-1)(n+2)$ est une hyperbole (figure 2-A) :

$$C_n^2 = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \quad \text{de centre } n = -\frac{1}{2} \quad \text{d'asymptote } C_n = n + \frac{1}{2}$$

$\begin{array}{c} \epsilon \\ \backslash \\ n \end{array}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0				
2	$\alpha_1 = 2,10$ $\alpha_2 = 2,11$	2,20 2,20	2,30 2,30	2,40 2,38	2,50 2,44
3	3,32 3,33	3,47 3,48	3,63 3,62	3,79 3,74	3,95 3,82
4	4,45 4,46	4,67 4,67	4,88 4,85	5,09 4,99	5,30 5,07
5	5,56 5,56	5,82 5,82	6,09 6,04	6,35 6,19	6,61 6,25
6	6,64 6,65	6,96 6,95	7,27 7,20	7,59 7,35	7,91 7,40

Figure V-3- A

$$\alpha_1 = \sqrt{(n-1)(n+1)} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

α_1 : solution exacte de l'équation (1) pour n grand

V.3 - Cas de la coque (épaisseur faible)

Il est possible d'obtenir une valeur approchée de x au premier ordre près par la formule :

$$x = x_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$x = \sqrt{(n-1)(n+2)} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

(3-A)

La courbe $x = g(n) = \sqrt{(n-1)(n+2)} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ est une hyperbole de centre $n = -\frac{1}{2}$ d'asymptote $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

La figure(3-A) donne un tableau comparatif entre les valeurs exactes x et l'approximation des coques au premier degré.

L'approximation est très bonne si on se rappelle qu'une erreur de 1/10 sur x donne une erreur de 50 Hertz/m

V.4 - Isocontraintes nulles

V.4.1 - Soit un réservoir $\Sigma(a,b)$ de rayon intérieur a et de rayon extérieur b .

Soit $x_0 \quad x_1 \quad x_2 \dots\dots\dots x \quad x_{i+1} \dots\dots\dots$ le spectre de Σ

Pour la fréquence adimensionnelle x_i , un vecteur propre possible $\vec{W}(x_i)$ du système (θ, ϕ) est :

$$\begin{aligned} W_1 &= -C_2(x_i) \\ W_2 &= C_1(x_i) \end{aligned} \quad (4-A)$$

La contrainte radiale ϕ_r correspondante est telle que :

$$\begin{aligned} a) \quad \sigma_{rr} &= 0 \\ b) \quad \sigma_{r\theta}(x_i, r) &= \begin{vmatrix} C_1(\eta) & C_2(\eta) \\ C_1(x_i) & C_2(x_i) \end{vmatrix} \quad (\text{à une constante multiplicative près}) \end{aligned} \quad (4-B)$$

$$\eta = \beta_i r$$

$$c) \quad \sigma_{r\phi} = -m \sigma_{r\theta}$$

V.4.2 - Soit r_0 une solution de $\sigma_{r\theta}(x_i, r) = 0$ (ce qui est équivalent à $\sigma_{r\phi} = 0$ pour $m > 0$)

On obtient en développant (4-B2)

$$\operatorname{tg}(\eta - x_i) = \frac{\psi_2(x_i) \psi_1(\eta) - \psi_1(\eta) \psi_2(x_i)}{\psi_1(\eta) \psi_1(x_i) + \psi_2(\eta) \psi_2(x_i)} \quad (4-C)$$

Cette équation donne les contraintes nulles de $\Sigma(a,b)$ pour une fréquence x_i donnée.

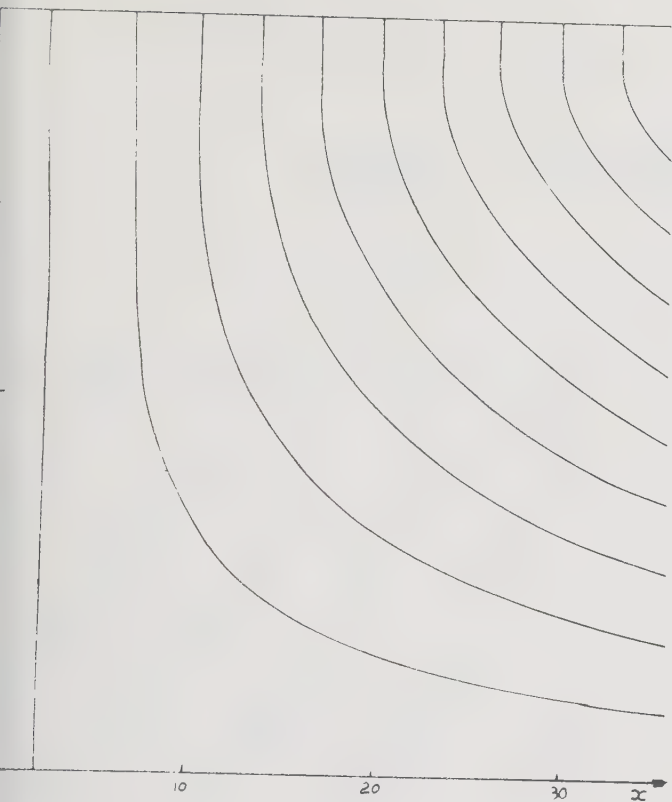
Les isocontraintes nulles sont des sphères

V.4.3 - Soit Σ_1 la sphère de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur b , de coefficient d'épaisseur $\epsilon_1 = 1 - \rho_1 = \frac{b - r_0}{b}$

Si on remplace ϵ_1 et ρ_1 par leurs valeurs dans (4-C), on obtient :

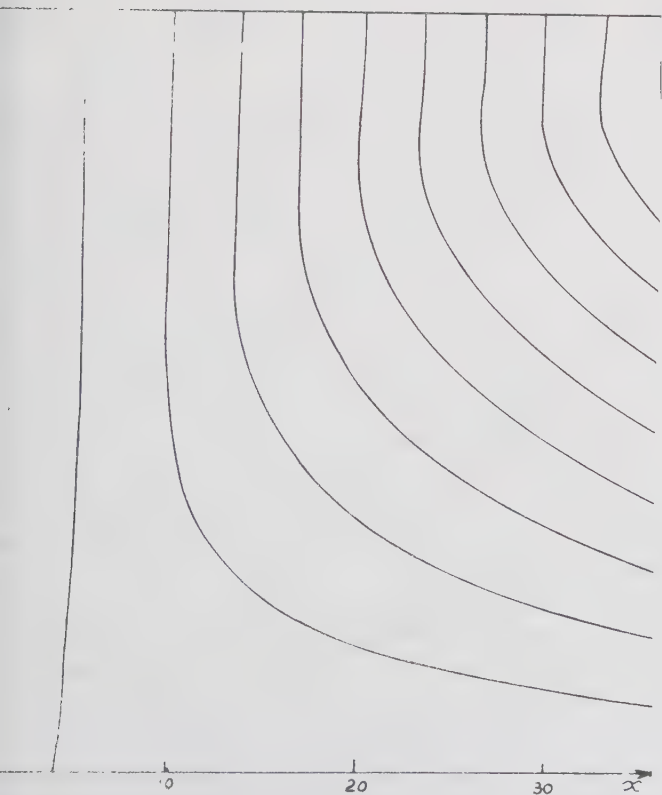
vibrations équivolumiques (θ, φ)

$n=2$



$n=4$

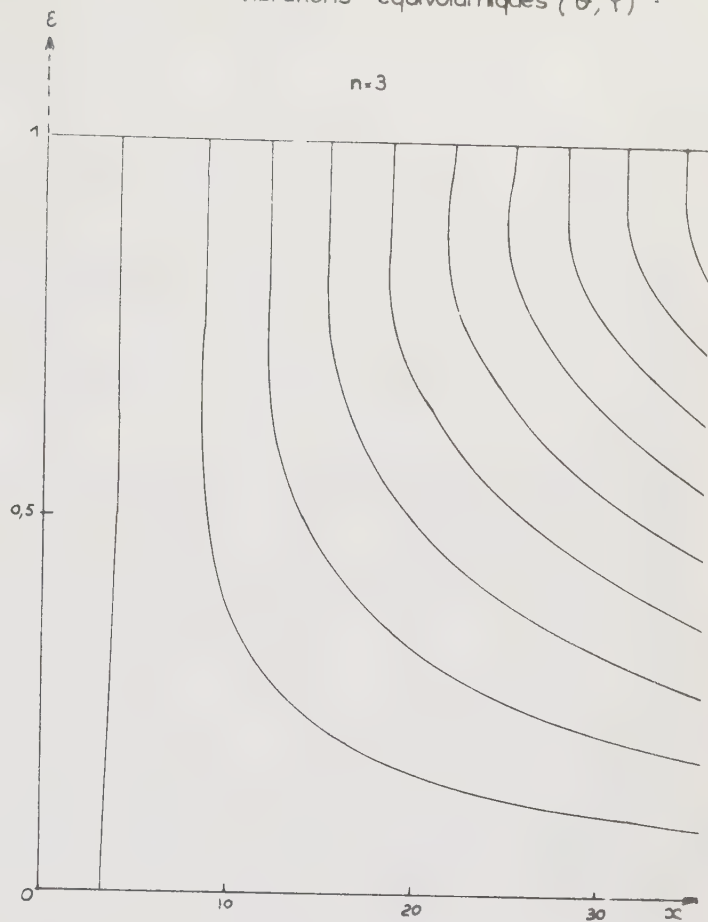
vibrations équivolumiques (θ, φ)



89

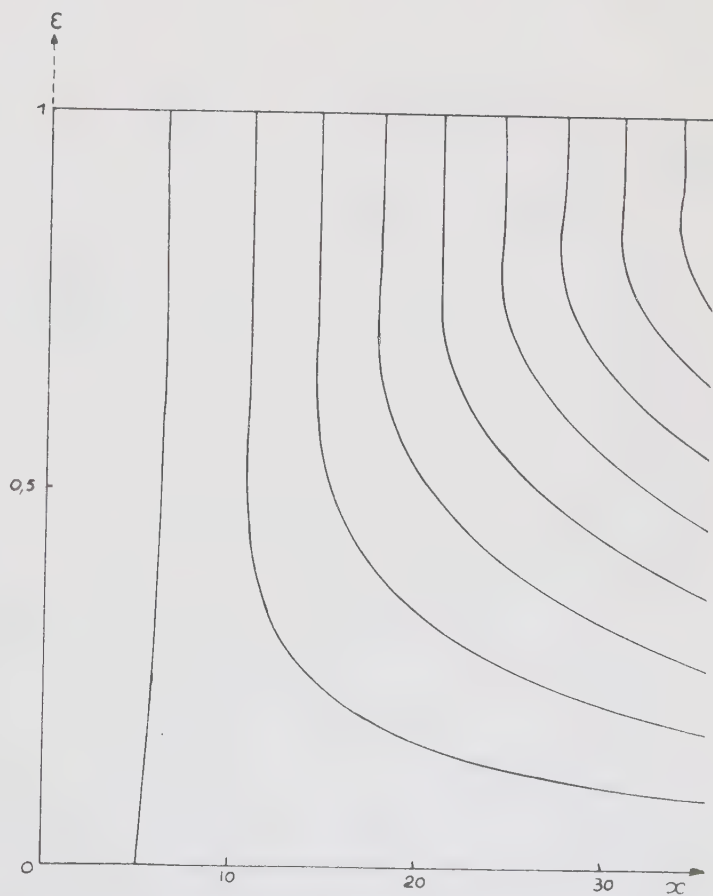
vibrations équivolumiques (θ, φ)

$n=3$



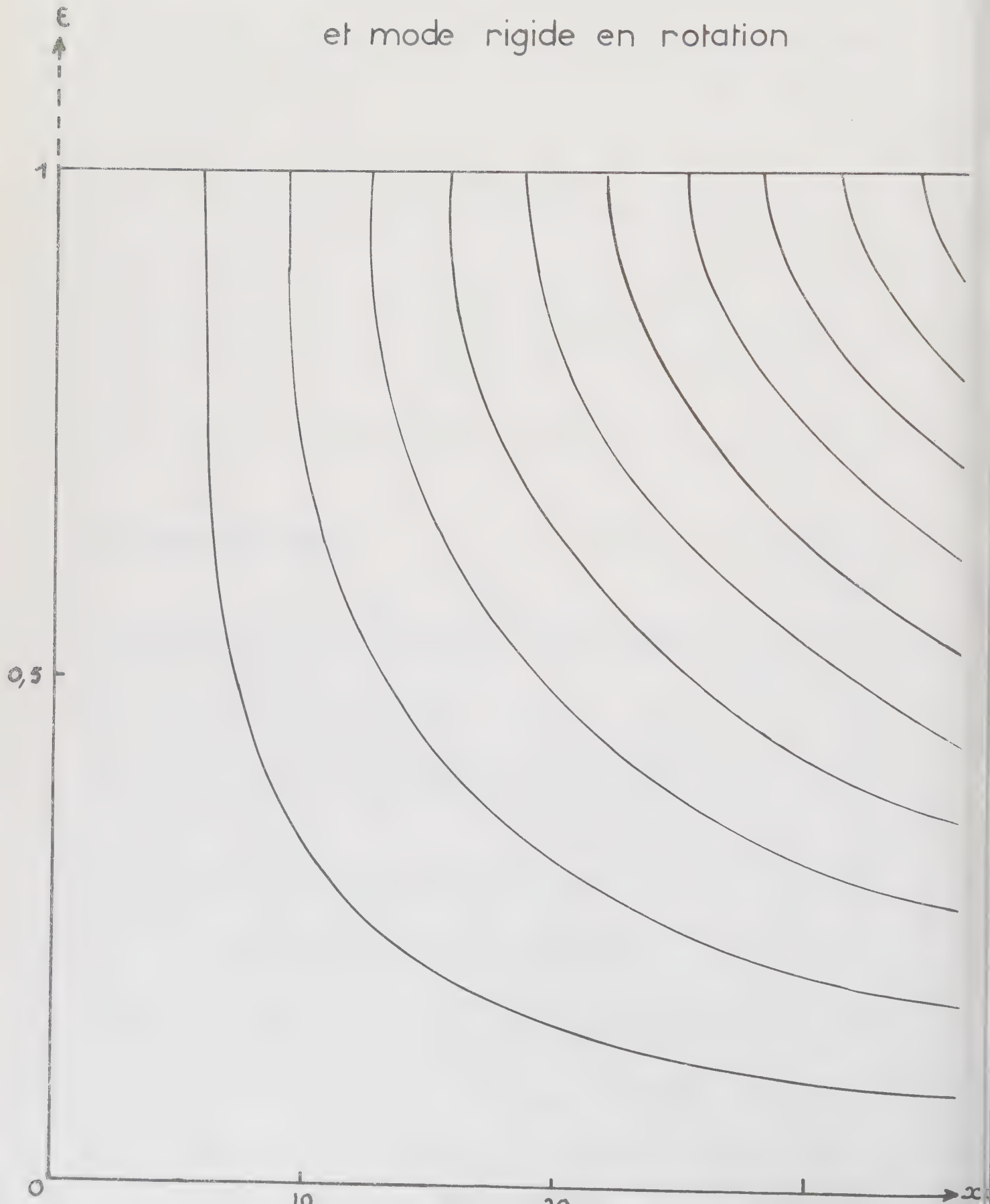
$n=5$

vibrations équivolumiques (θ, φ)



$$n = 1$$

vibrations équivolumiques (θ, φ)
et mode rigide en rotation



90 BIS

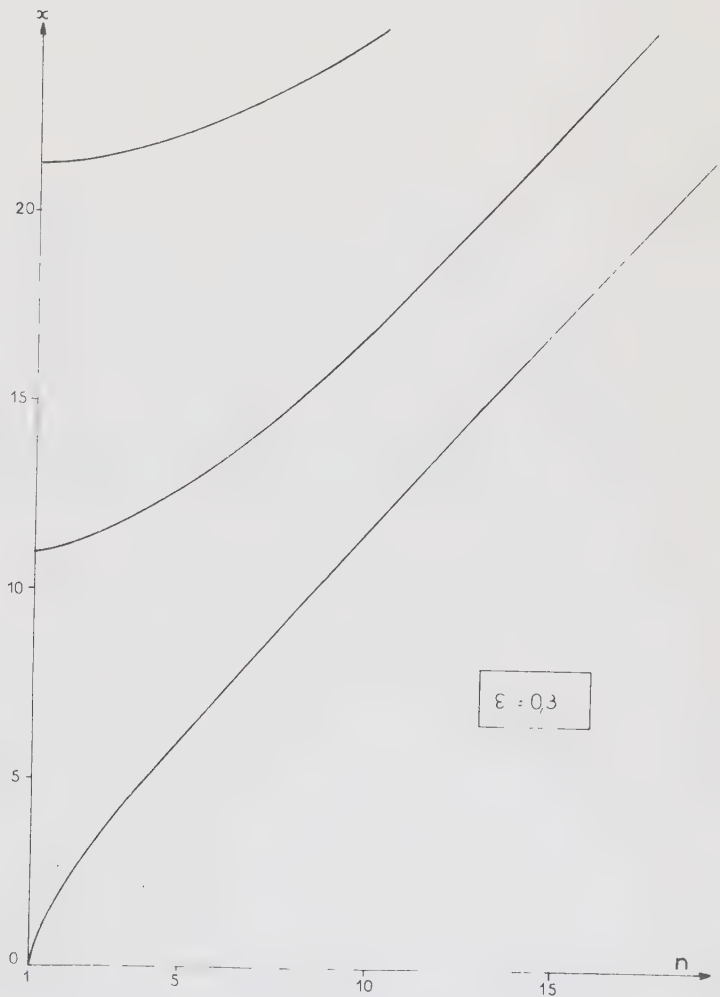
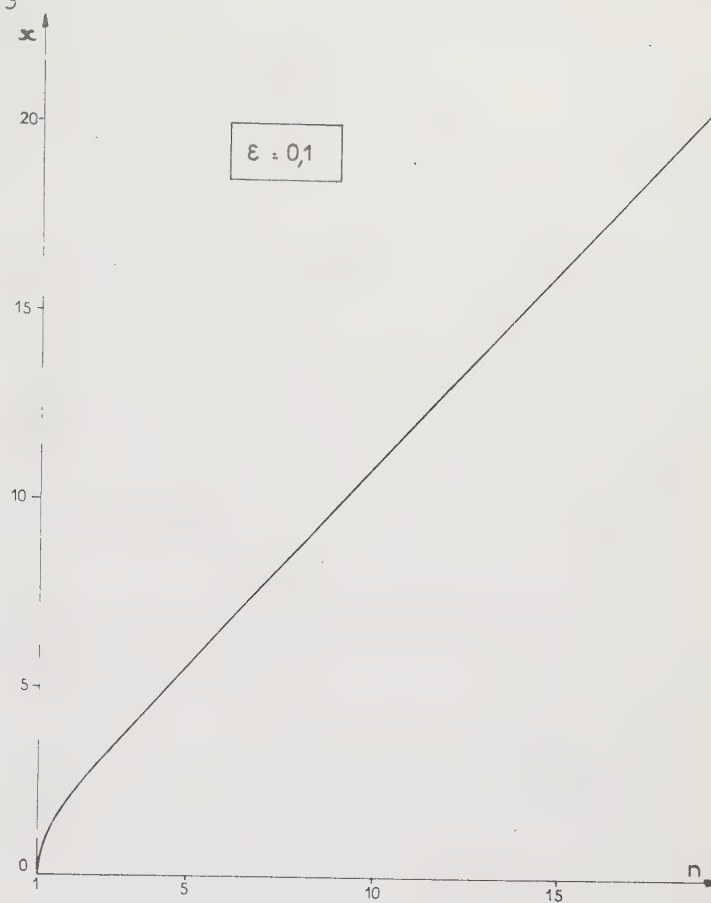
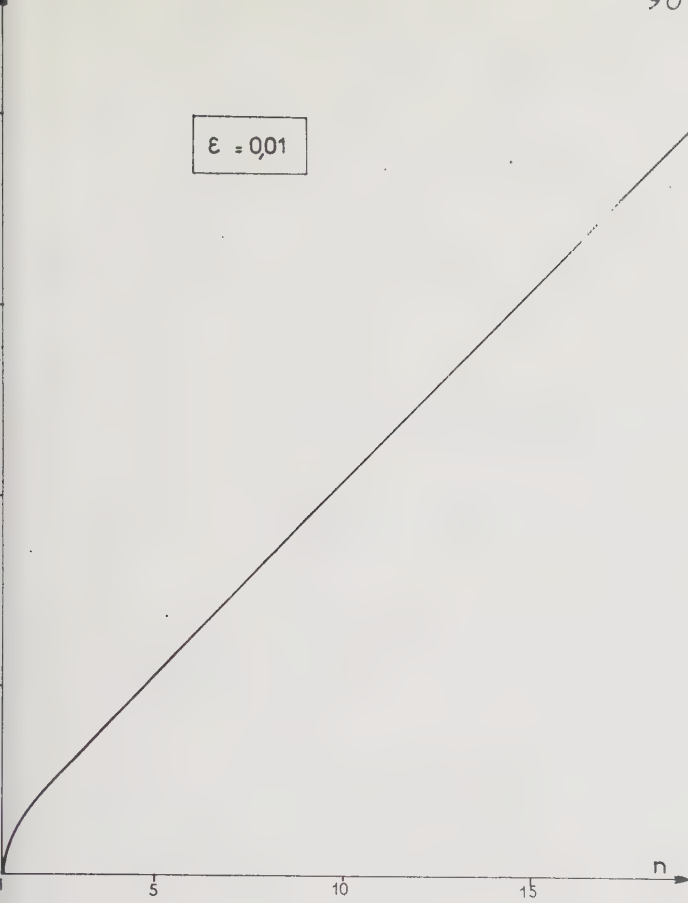


figure: V-6-C



$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 x_i = \frac{\psi_2(\rho_1 x_i) \psi_1(x_i) - \psi_1(\rho_1 x_i) \psi_2(x_i)}{\psi_1(x_i) \psi_1(\rho_1 x_i) + \psi_2(x_i) \psi_2(\rho_1 x_i)} \quad (4-D)$$

ce qui montre (confère V.1.B) que x_i est fréquence adimensionnelle de $\Sigma_1(r_0, b)$

V.5 - Construction géométrique

Supposons l'indice de vibration $n \geq 1$ fixé.

$\Gamma_{k,n}$ est la courbe de fréquence de $\Sigma(a, b)$ le long duquel il existe k surfaces nodales ou encore $(k + 1)$ contraintes nulles $\sigma_{r\theta}$

En utilisant les résultats de III.4, on voit qu'il est possible de construire toutes les courbes $\Gamma_{k,n}$ à partir de $\Gamma_{1,n}$. La construction géométrique utilisée dans le cas des vibrations radiales est valable (confère III.4)

$\sigma_{r\theta}$ joue ici le rôle de σ_{rr}

V.6 - Résultats

Les figures (5-A) et (5-B) donnent pour un indice de vibration n fixé ($1 \leq n \leq 5$) les courbes de fréquence $\varepsilon = h_n(x)$

Il est plus commode d'avoir le spectre de fréquence d'un réservoir d'épaisseur ε donné.

Les figures (5-C) et (5-D) montrent que le spectre obtenu est régulier et que dans le cas ε faible, la première branche est la plus importante.

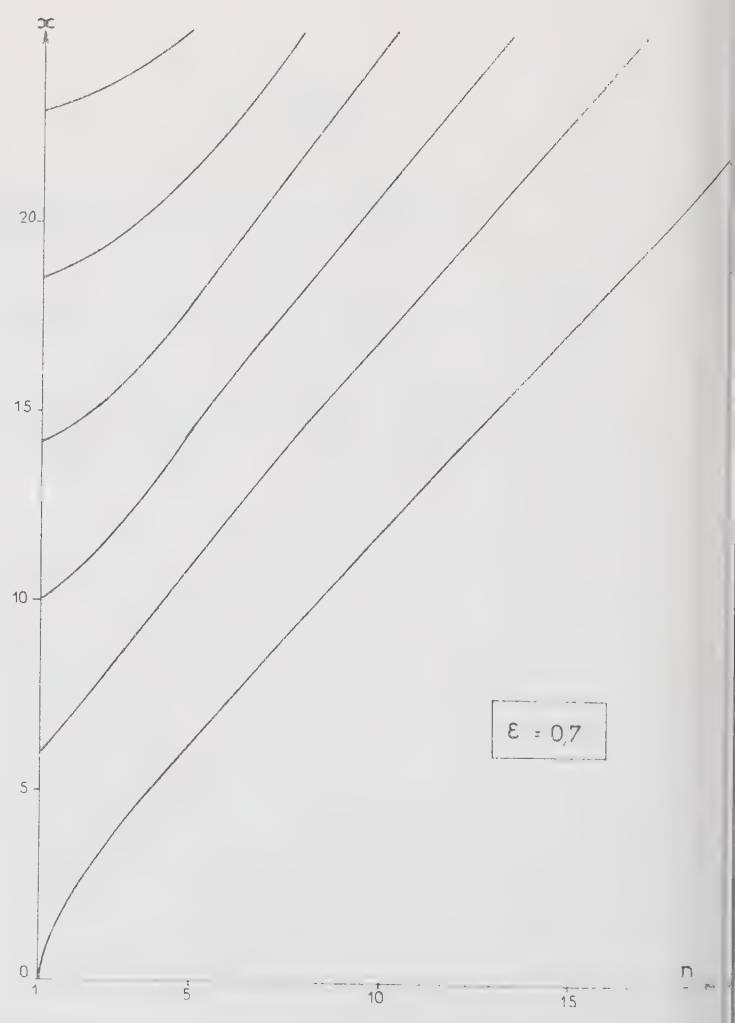
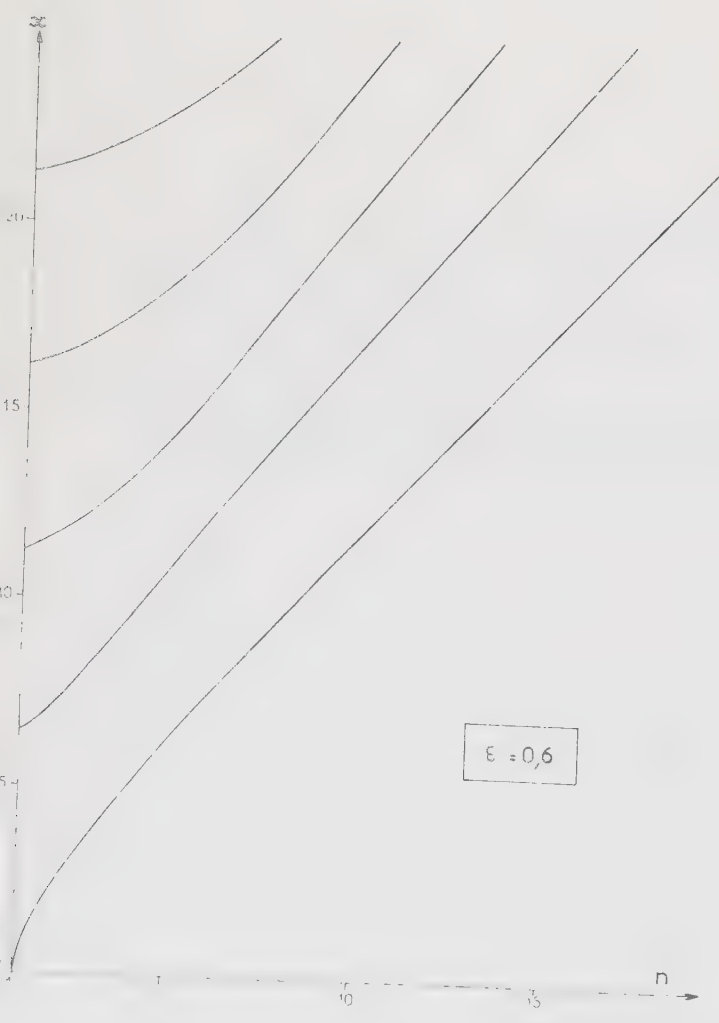
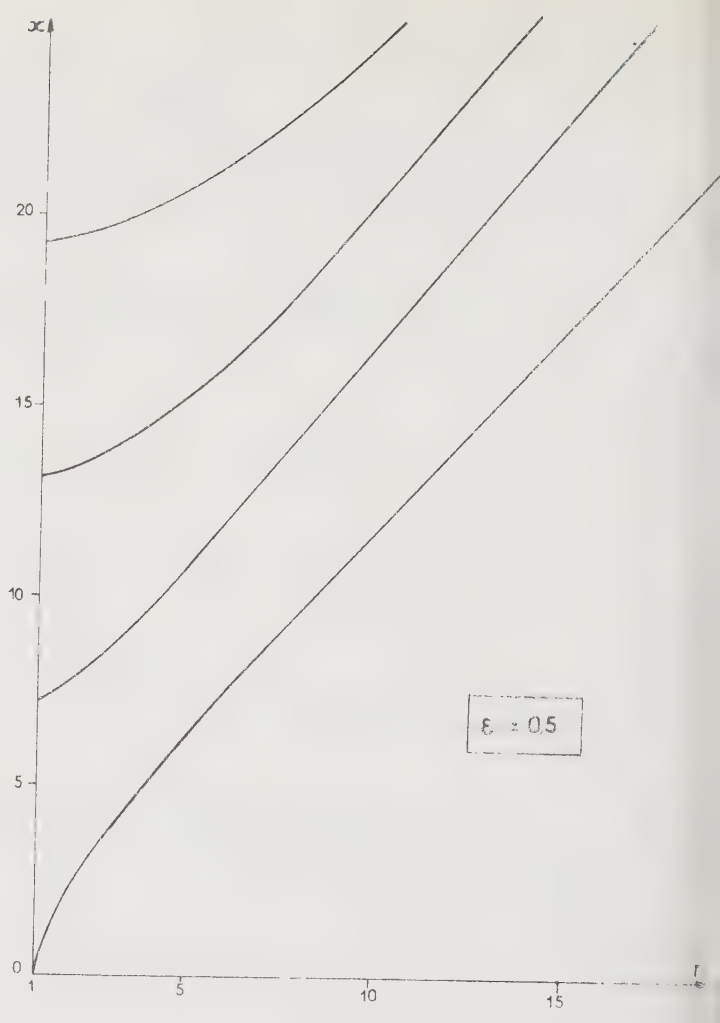
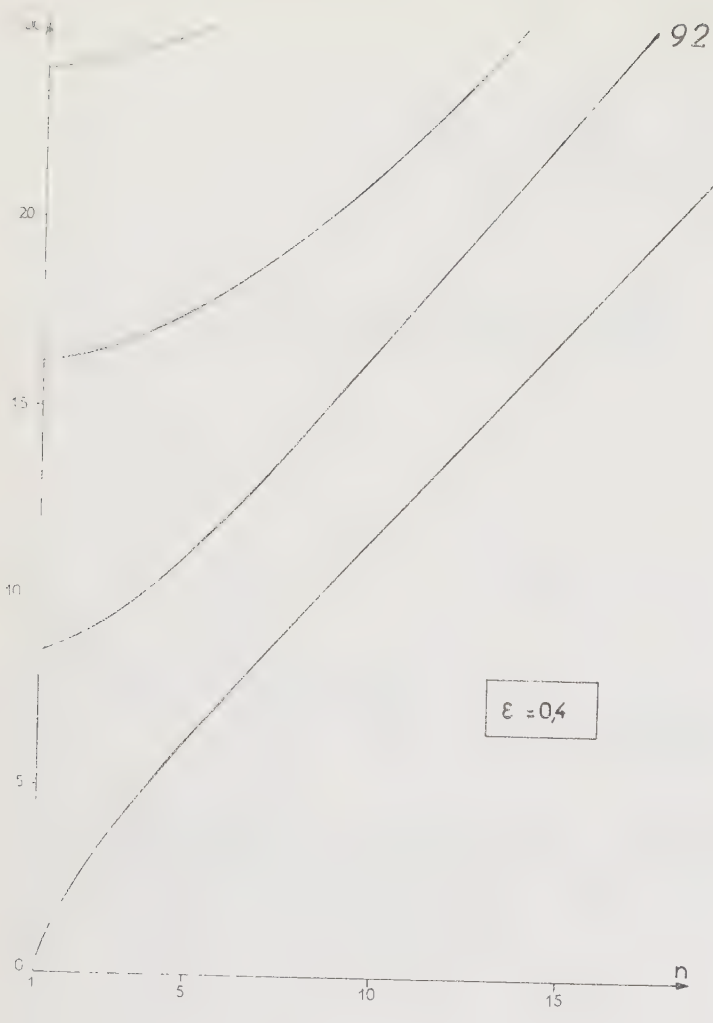


figure : V-6-D

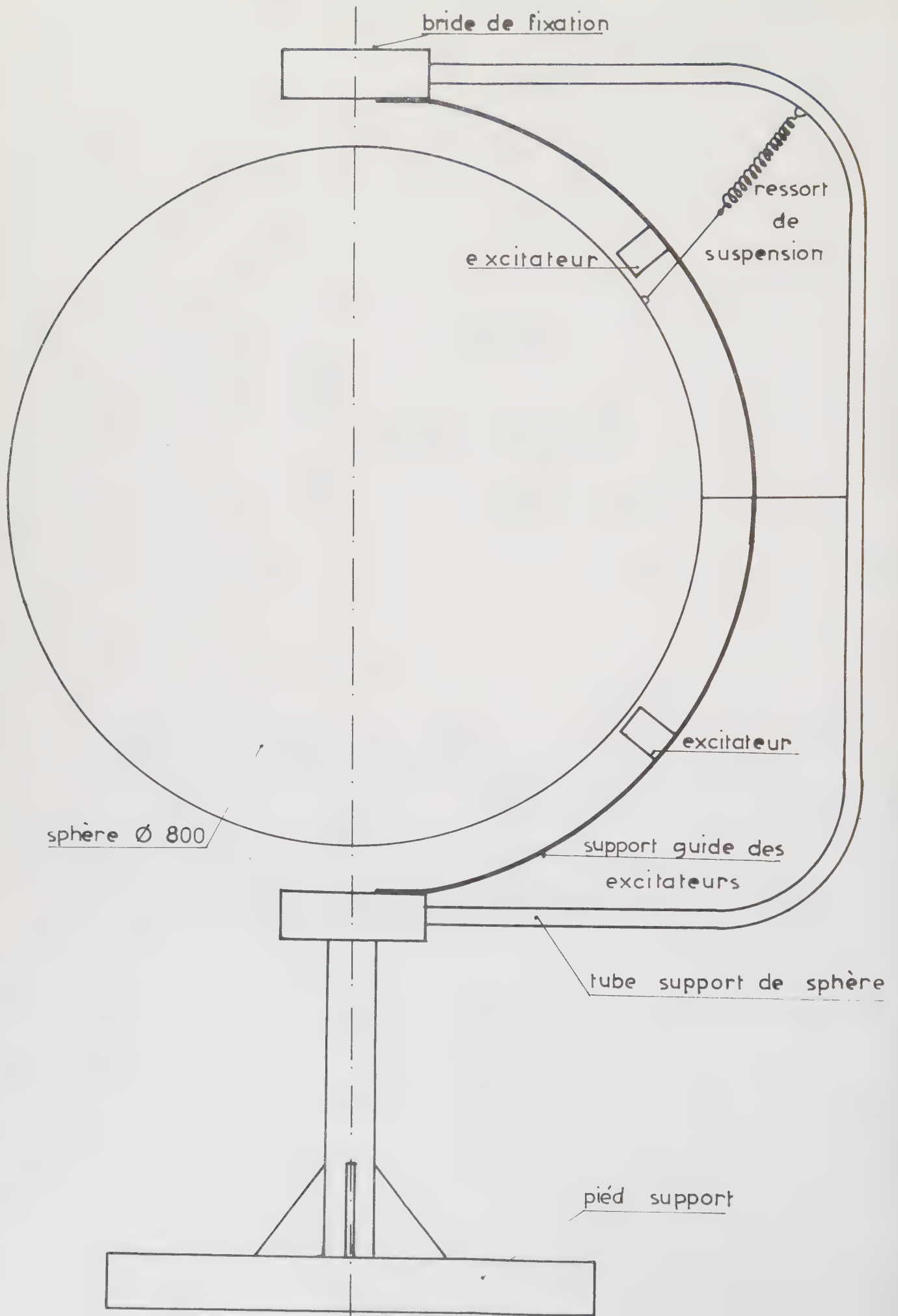
CHAPITRE VI

Résultats expérimentaux

Nous avons utilisé un réservoir sphérique $\Sigma(a,b)$ de rayon intérieur $a = 400$ mm, de rayon extérieur $b = 402$ mm

L'épaisseur est $h = 2$ mm. Le coefficient d'épaisseur $\epsilon = \frac{2}{402} \approx 0,005$ étant très faible, on peut assimiler Σ à une coque (même à une membrane $\epsilon = 0$)

SCHEMA DE MONTAGE



VI.1 - Montage

a) La figure (VI.1.A) donne le schéma du montage

Le réservoir est "libre". Il est suspendu par trois ressorts mous. La fréquence du système oscillant masse plus ressort n'excède par 10 Hertz.

Ces ressorts mous sont à 120° les uns des autres.

L'excitation se fait par des électroaimants.

Les électroaimants peuvent être en phase ou en opposition de phase.

Il y a quatre supports guide des excitateurs disposés à 90° les uns des autres.

b) La sphère est en acier ordinaire ($\nu = 0,3$)

VI.2 - Etude de $\Sigma(a,b)$

Σ est une coque. On peut donc lui appliquer les résultats des chapitres précédents (III, IV, V).

Les figures (2-A), (2-B), (2-C) donnent les fréquences théoriques en Hertz de la coque.

mode f_{a_n} fréquences en Hertz

$$\varepsilon = \frac{2}{402}$$

dizaines n unités	0	1	2
0		1982	2003
1	0	1987	
2	1477	1990	
3	1749	1993	
4	1855	1995	
5	1908	1997	
6	1937	1999	
7	1955	2000	
8	1968	2001	
9	1976	2002	

VI.2.1 - Les modes fa_n et fb_n ($n \geq 1$)

Les coefficients de fréquence a_n et b_n ($a_n < b_n$) sont obtenus à l'aide de la formule (IV.8.E)

$$\begin{matrix} a_n^2 \\ b_n^2 \end{matrix} = \frac{1 + 3\nu + n(n+1) \pm \sqrt{(1 + 3\nu + n(n+1))^2 - 4(1 - \nu^2)(n(n+1) - 2)}}{1 - \nu} \quad (2-A)$$

Ils correspondent à des vibrations (R, θ, ϕ)

VI.2.2 - Les modes fc_n ($n \geq 1$)

c_n est obtenu à l'aide de la formule (V.2.B)

$$c_n^2 = (n-1)(n+2) \quad (2-B)$$

Les vibrations correspondantes sont équivolumiques ($u = 0$)

VI.2.3 - Les modes fb_0

fb_0 correspond aux vibrations radiales. Ici, comme le rayon de la sphère est très faible, seule la fréquence fb_0 la plus faible sera réellement mesurable. Elle correspond (III.2.A) à b_0 tel que :

$$b_0^2 = \frac{4(1+\nu)}{1-\nu} \quad (2-C)$$

mode (f_{b_n})

fréquences
en Hertz

$$\varepsilon = \frac{2}{402}$$

dizaines n unités	0	1	2
0	3388	22198	43227
1	4161	24297	
2	5734	26398	
3	7658	28500	
4	9683	30603	
5	11745	32706	
6	13824	34810	
7	15911	36914	
8	18004	39018	
9	20100	41123	

(θ, φ) fréquences

$$\varepsilon = \frac{2}{402}$$

dizaines n unités	0	1	2
0		12 953	25 483
1	0	14 211	
2	24 93	15 467	
3	39 41	16 722	
4	52 88	17 976	
5	65 95	19 228	
6	78 83	20 480	
7	91 59	21 732	
8	104 28	22 982	
9	116 92	24 233	

VI.2.4 -

La sphère est en acier ordinaire. On suppose que le coefficient de Poisson du matériau est $\nu = 0,3$

Si x_n est un coefficient de fréquence, la fréquence réelle est :

$$f_n \approx \frac{500}{b} x_n$$

ce qui donne :

$$f_n \approx \frac{500}{0,400} x_n = 1250 x_n$$

$f_n = 1250 x_n$

(2-D)

Remarque

Si $\nu = 0,3$ $b_o = 2,725$ (confère IV.2.B)

La figure (2-D) donne le spectre des fréquences de Σ

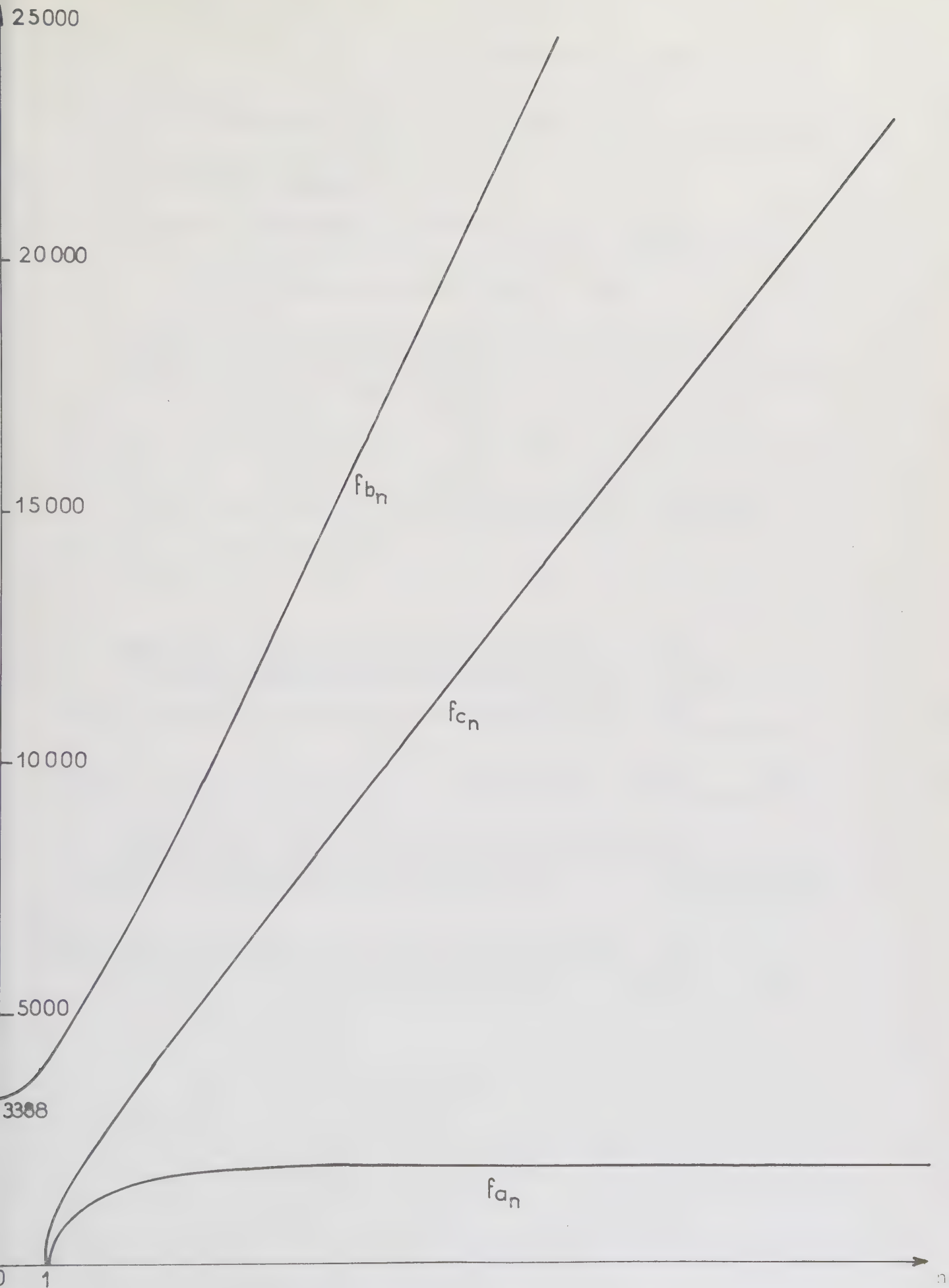


figure VI.2.D - Spectre des fréquences de γ

VI-2-5 RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les mesures expérimentales ont été faites avec une excitation appropriée à la symétrie axiale (cas $m = 0$).

Les premiers modes (f_{an}) sont facilement mesurables.

Le mode $f_{a1} = 0$ correspond à la translation d'ensemble du réservoir sphérique.

Le tableau ci-dessous résume les mesures faites :

n	f_{an} théorique (Hz)		f_{an} expérimentaux (Hz)
2	1477	1462	1477
3	1749	1752	1650
4	1855	1816	1842

Pour une fréquence et une forme propre théorique donnée on a deux fréquences associées et une même forme propre expérimentale.

Cette forme expérimentale correspond à la déformée théorique (voir page 81).

Donc, il semblerait que l'on soit en présence d'un phénomène de dédoublement des fréquences.

Ce phénomène est en cours d'explication. Si on considère un cas plus simple, une poutre rectangulaire libre ($a \neq b$) par exemple, on obtient lorsque $b = a + \epsilon$ un dédoublement des fréquences de la plaque carrée ($a = b$).

Pour le mode (f_{bn}) ainsi que le mode (f_{cn}) la précision insuffisante des mesures liée à un éventuel dédoublement et chevauchement des courbes de fréquence n'a pas permis de conclure.

CHAPITRE VII

CONCLUSIONS

Dans cet exposé, nous étudions les vibrations les plus générales de réservoirs sphériques épais ou minces.

Un réservoir étudié, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , est supposé libre (la densité volumique de forces extérieures est nulle ainsi que la densité surfacique). Le matériau constituant le réservoir est supposé homogène, isotrope et élastique.

L'équation de l'Elasticité :

$$(\lambda + 2 G) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{\xi}) - G \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{\xi}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$$

est résolue en prenant le déplacement $\vec{\xi}$ sous la forme :

$$\vec{\xi} = \vec{k} + \operatorname{rot} \vec{h} \text{ avec } \operatorname{div} \vec{h} = 0$$

En régime linéaire, nous obtenons un système de deux équations de HELMOLTZ :

$$\Delta K + \epsilon^2 K = 0 \quad k = K e^{j \omega t}$$

$$\Delta \vec{H} + \epsilon^2 \vec{H} = \vec{0} \quad \vec{h} = \vec{H} e^{j \omega t}$$

Nous résolvons par la méthode de séparation des variables les deux équations. En exprimant les conditions aux limites, nous obtenons un système homogène de 6 équations à 6 inconnues dont le déterminant doit être nul, ce qui donne l'équation aux fréquences.

Nous utilisons les paramètres adimensionnels $x = \beta b$ et $\epsilon = 1 - \frac{a}{b}$

Il existe pour un réservoir sphérique libre trois types de vibrations :

a) des vibrations radiales (chapitre III) qui sont à des fréquences élevées par rapport aux deux autres types de vibrations.

Pour une membrane ($b = a$), il existe un seul mode

$$x_0^2 = 12 - 16 \gamma^2 \qquad \gamma^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1-\nu)}$$

ν étant le coefficient de POISSON du matériau

b) des vibrations (R, θ, ϕ) couplées dans les trois directions (chapitre IV).

Ce sont les plus nombreuses et les plus générales. Pour une membrane, il existe deux fréquences pour chaque valeur d'un indice n (appelé indice de vibration):

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1 + 3\nu - n(n+1) + \sqrt{(1 + 3\nu + n(n+1))^2 - 4(1-\nu^2)(n(n+1) - 2)}}{1 - \nu}$$

c) des vibrations (θ, ϕ).

La dilatation volumique est nulle ainsi que le déplacement radial u .

Par une membrane, il existe un seul mode :

$$c_n^2 = (n - 1)(n + 2)$$

Les expériences ont été réalisées à partir d'une sphère en acier de rayon intérieur $a = 400$ mm et d'épaisseur $h = b - a = 2$ mm (chapitre VI)

On observe un dédoublement des fréquences (f_{a_n}). Ceci a perturbé la mesure des fréquences (f_{b_n}) et (f_{c_n}) car les courbes de vibrations dédoublées se chevauchent.

Ceci peut s'interpréter en considérant que le réservoir sphérique est en réalité elliptique et de révolution. Il suffirait de refaire une étude analogue des réservoirs elliptiques de révolution, mais la technique de révolution de l'équation de HELMOLTZ vectorielle n'est plus utilisable dans ce cas là.

Cet exposé est aussi le début d'une étude plus complète des réservoirs sphériques avec points fixes et cercles fixes. De grandes difficultés purement mathématiques subsistent mais des travaux sont en cours au Laboratoire de Mécanique des Structures de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique.

CHAPITRE VIII - ANNEXE I

Dans ce chapitre VIII, les propriétés essentielles des fonctions de Bessel sphériques (VIII.1) et des fonctions de Legendre (VIII.2) sont rappelées.

Les références sont (2), (11), (15) pour les fonctions de Bessel sphériques et (2), (12) pour les fonctions de Legendre.

REMARQUES

a) $\binom{p}{n}$ désigne les combinaisons de n éléments pris p à p

b) Les coefficients $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont exclusivement réservés aux fonctions $j_n(x)$ et $y_n(x)$

VIII-4 - Fonctions de Bessel sphériques

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left(k^2 r^2 - n(n+1) \right) R(r) = 0 \quad (1-A)$$

où n est un entier positif ou nul et $kr \gg 0$ (on peut supposer $k \gg 0$ et $r \gg 0$)

La solution générale de (1-A) s'écrit :

$$R_n(x) = C_1 j_n(x) + C_2 y_n(x) \quad x = kr \gg 0$$

où :

a) C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires

b) $j_n(x)$ et $y_n(x)$ sont deux solutions de (1-A), indépendantes

$$(j'_n(x) y_n(x) - y'_n(x) j_n(x)) = -\frac{1}{x^2} \text{ qui vérifient :}$$

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2x}} J_{n+1/2}(x) ; \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2x}} Y_{n+1/2}(x) \quad (1-B)$$

Les fonctions $J_{n+1/2}(x)$ et $Y_{n+1/2}(x)$ sont les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce d'ordre $n+1/2$

L'expression générale des fonctions sphériques est :

$$j_n(x) = A_n(x) \cos x + B_n(x) \sin x \quad (C1)$$

(1-C)

$$y_n(x) = -B_n(x) \cos x + A_n(x) \sin x \quad (C2)$$

$A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont des polynômes en $\frac{1}{x}$

Les fonctions $j_n(x)$ et $y_n(x)$ jouent un rôle symétrique et f_n désignera l'une ou l'autre de ces fonctions, ou une combinaison linéaire à coefficients constants de j_n et y_n

1.1 - Relations de récurrences

a) Les fonctions de Bessel sphériques sont calculables par la relation de récurrence d'ordre 2 :

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$$

$$j_3(x) = \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2} \right) \sin x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x$$

$$j_4(x) = \left(\frac{105}{x^5} - \frac{45}{x^3} + \frac{1}{x} \right) \sin x + \left(-\frac{105}{x^4} + \frac{10}{x^2} \right) \cos x$$

$$j_5(x) = \left(\frac{945}{x^6} - \frac{420}{x^4} + \frac{15}{x^2} \right) \sin x - \left(-\frac{945}{x^5} + \frac{105}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x$$

$$j_6(x) = \left(\frac{10395}{x^7} - \frac{4725}{x^5} + \frac{210}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x + \left(-\frac{10395}{x^6} + \frac{1260}{x^4} - \frac{21}{x^2} \right) \cos x$$

Plus généralement :

$$j_n(x) = A_n(x) \cos x + B_n(x) \sin x$$

Tableau des premières fonctions $j_n(x)$

$$f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n - f_{n-1} \quad (D1)$$

$$\text{avec } j_0 = \frac{\sin x}{x} \quad (D2) ; \quad y_0 = -\frac{\cos x}{x} \quad (D3) \quad (1-D)$$

$$j_1 = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad (D4) ; \quad y_1 = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \quad (D5)$$

La figure (1-A) donne les premières fonctions $j_n(x)$

$$b) \quad \frac{d f_n}{dx} = \frac{n}{x} f_n - f_{n+1} \quad (E1)$$

$$\frac{d f_n}{dx} = f_{n-1} - \frac{(n+1)}{x} f_n \quad (E2)$$

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} = \left(\frac{n(n-1)}{x^2} - 1 \right) f_n + \frac{2}{x} f_{n+1} \quad (E3) \quad (1-E)$$

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} = -\frac{2}{x} f_n + \left(\frac{(n+1)(n+2)}{x^2} - 1 \right) f_{n+1} \quad (E4)$$

plus généralement $\frac{d^p f_n}{dx^p}$ s'exprime linéairement en fonction de f_n et f_{n+1} (respectivement de f_{n-1} et f_n), les coefficients étant des polynômes en $\frac{1}{x}$

$$\frac{d^p f_n}{dx^p} = C_{n,p} f_n(x) + D_{n,p} f_{n+1}(x) = \bar{C}_{n,p} f_{n-1}(x) + \bar{D}_{n,p} f_n(x)$$

$$\text{où } \bar{C}_{n,p} = -D_{n,p} ; \quad \bar{D}_{n,p} = \frac{2n+1}{x} D_{n,p} + C_{n,p}$$

avec les relations de récurrence :

$$C_{n,p+1} = \frac{d C_{n,p}}{dx} + \frac{n}{x} C_{n,p} + D_{n,p}$$

$$D_{n,p+1} = \frac{d D_{n,p}}{dx} - C_{n,p} - \frac{(n+2)}{x} D_{n,p}$$

ainsi :

$$\frac{d^3 f_n}{dx^3} = \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{x^3} - \frac{(n-2)}{x} \right) f_n + \left(1 - \frac{(n-1)(n+2)}{x^2} \right) f_{n+1}$$

1.2 - Comportement au voisinage de l'origine

Lorsque $x \rightarrow 0^+$; $j_n(x) \rightarrow 0^+$ et $y_n(x) \rightarrow -\infty$

on a les équivalences au voisinage de zéro :

$$j_n(x) \simeq \frac{x^n}{(2n+1)!!} \quad (F1) \quad \text{et} \quad y_n(x) \simeq -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \quad (F2) \quad (1-F)$$

où $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$

Les figures (1-B), (1-C) donnent le tracé de $f_n(x)$ pour $0 < x \leq 20$
et $0 \leq n \leq 9$

1.3 - Remarques

a) Soit $S(x) = E_1(x) f_n(x) + E_2(x) f_{n+1}(x)$

$$\frac{dS}{dx} = \left(\frac{d E_1}{dx} + \frac{n}{x} E_1 + E_2 \right) f_n(x) + \left(\frac{d E_2}{dx} - E_1 - \frac{(n+2)}{x} E_2 \right) f_{n+1}$$

$\frac{d^p S}{dx^p}$ s'exprimera donc linéairement en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$

$$= \sum_{l=0}^{l=p} \left(\binom{p-1}{n} \frac{d^{p-1} E_1}{dx^{p-1}} C_{n,l} + \frac{d^{p-1} E_2}{dx^{p-1}} \bar{C}_{n+1,l} \right) f_n + \sum_{l=0}^{l=p} \left(\frac{d^{p-1} E_1}{dx^{p-1}} D_{n,l} + \frac{d^{p-1} E_2}{dx^{p-1}} \bar{D}_{n+1,l} \right) f_{n+1}$$

b) Soit S le déterminant :

$$\begin{vmatrix} G_1(x) j_n(x) + G_2(x) j_{n+1}(x) & - & G_2(x) y_n(x) + G_1(x) y_{n+1}(x) \\ G_3(x) j_n(x) + G_4(x) j_{n+1}(x) & - & G_4(x) y_n(x) + G_5(x) y_{n+1}(x) \end{vmatrix}$$

En utilisant $j_n y_{n+1} - y_n j_{n+1} = -\frac{1}{x^2}$

$$S = -\frac{1}{x^2} (G_1 G_4 - G_2 G_3) = -\frac{1}{x^2} \det \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \rightarrow \quad (1-G)$$

c) Calcul de $A = j_n y'_n - y_n j'_n$

$$A_n(x) = j_n \left(\frac{n}{x} y_n - y_{n+1} \right) - y_n \left(\frac{n}{x} j_n - j_{n+1} \right)$$

$$A_n(x) = - (j_n y_{n+1} - y_n j_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{x^2}} \quad (1-H)$$

$A_n(x)$ est les Wronkien de j_n et de y_n

d) Calcul de $B_n(x) = j_n y'_{n+1} - y_n j'_{n+1}$

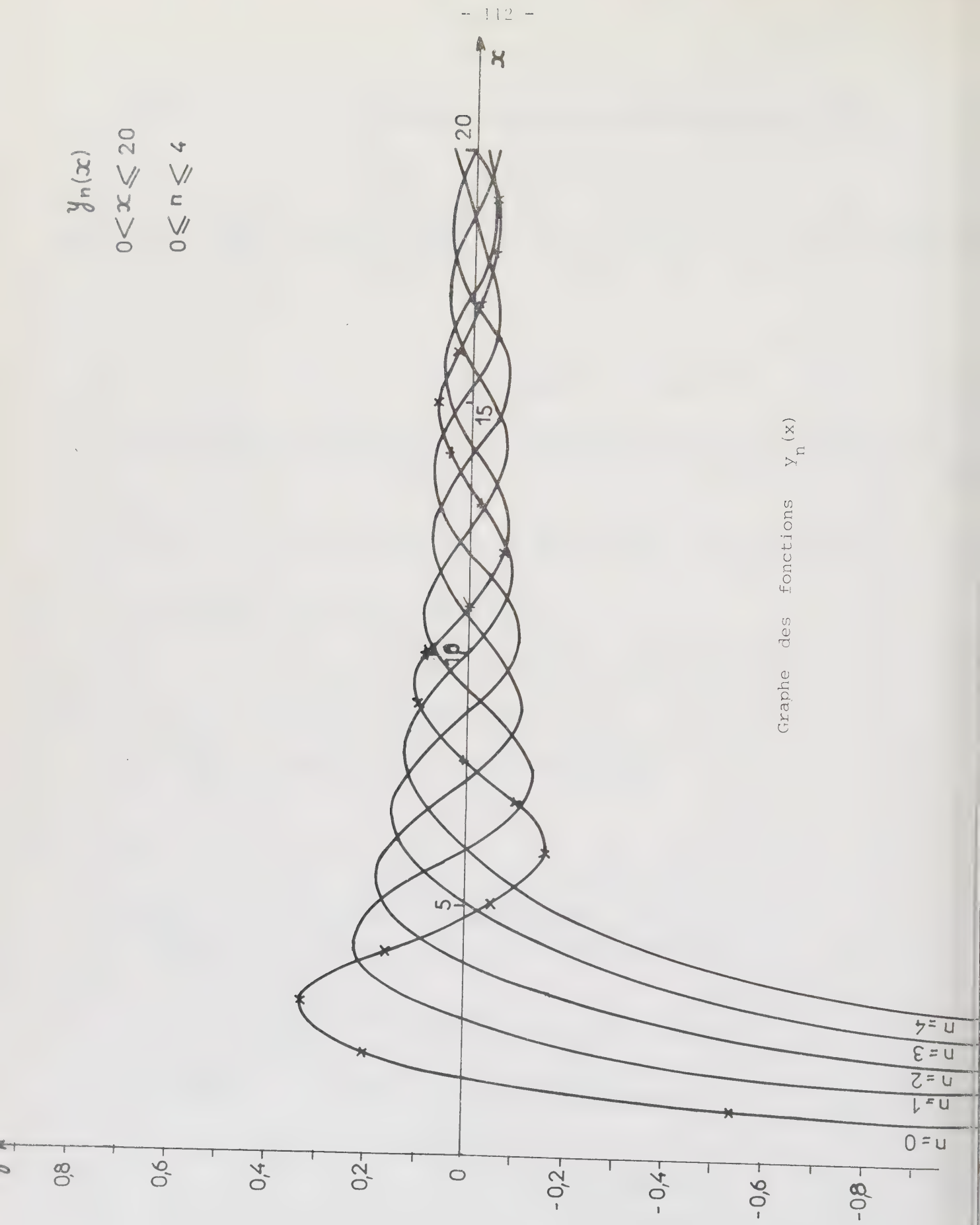
$$B_n(x) = j_n \left(y_n - \frac{(n+2)}{x} y_{n+1} \right) - y_n \left(j_n - \frac{(n+2)}{x} j_{n+1} \right)$$

$$= -\frac{(n+2)}{x} (j_n y_{n+1} - y_n j_{n+1}) = \boxed{\frac{n+2}{x^3}} \quad (1-I)$$

$$y_n(x)$$

$$0 < x \leq 20$$

$$0 \leq n \leq 4$$



Graphe des fonctions $y_n(x)$

Figure VIII.1.B

$y_n(x)$
 $0 < x \leq 20$
 $5 \leq n \leq 10$

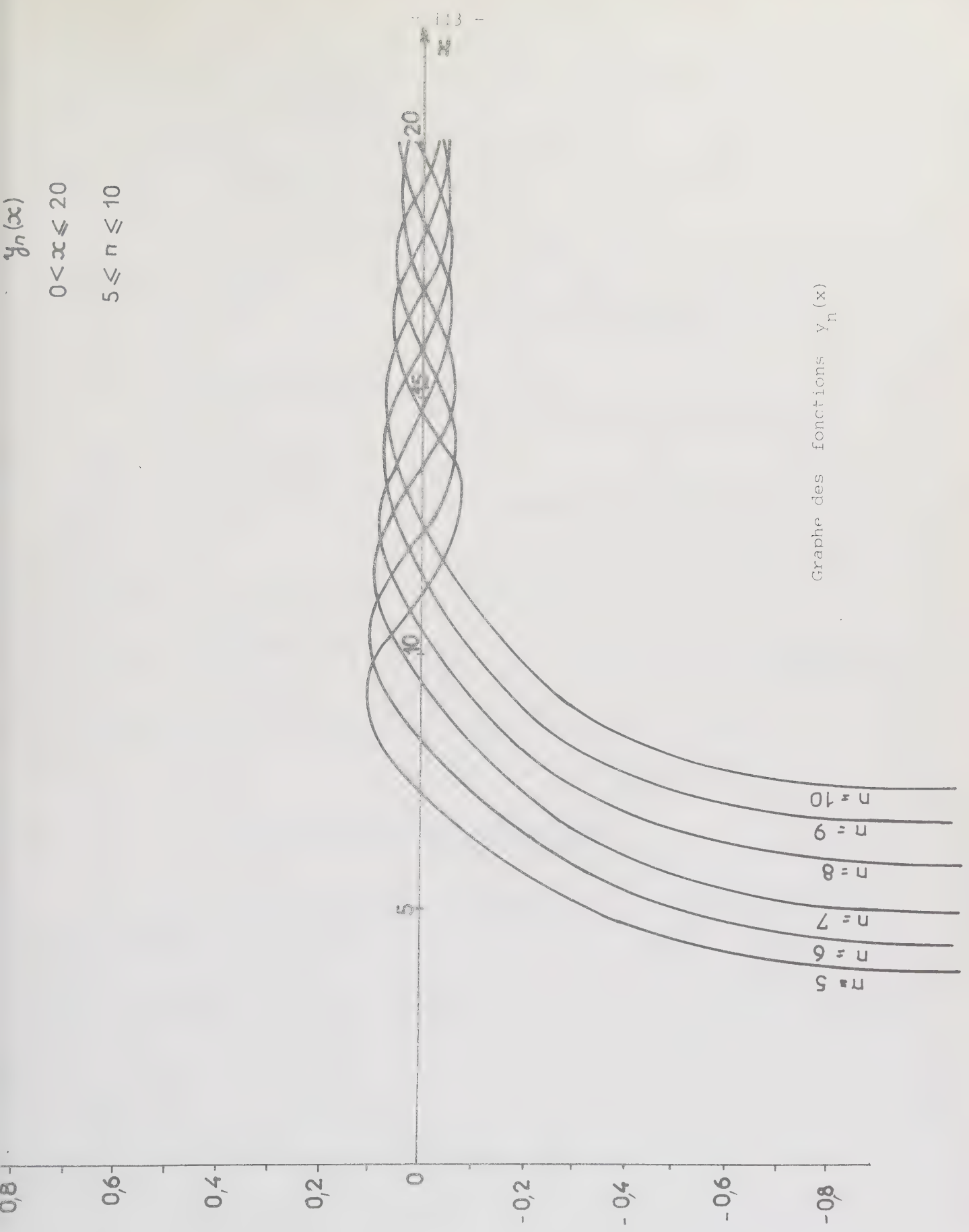


Figure VII.1.1.C

e) Calcul de $C_n(x) = j_{n+1} y_n^{(p)} - y_{n+1} j_n^{(p)}$

$$C_n(x) = j_{n+1} \left(\frac{n}{x} y_n - y_{n+1} \right) - y_{n+1} \left(\frac{n}{x} j_n - j_{n+1} \right)$$

$$= \frac{n}{x} (j_{n+1} y_n - y_{n+1} j_n) = \boxed{\frac{n}{x^3}}$$

f) $E(x) = j_n y_n^{(p)} - y_n j_n^{(p)}$

$$y_n^{(p)} = C_{n,p} y_n + D_{n,p} y_{n+1}$$

$$j_n^{(p)} = C_{n,p} j_n + D_{n,p} j_{n+1}$$

$$E(x) = D_{n,p} (j_n y_{n+1} - y_n j_{n+1}) = \boxed{-\frac{D_{n,p}}{x^2}} \quad (1-J)$$

g) $F(x) = j_n y_{n+1}^{(p)} - y_n j_{n+1}^{(p)}$

$$y_{n+1}^{(p)} = \bar{C}_{n+1,p} y_n + \bar{D}_{n+1,p} y_{n+1}$$

$$F(x) = j_n (\bar{C}_{n+1,p} y_n + \bar{D}_{n+1,p} y_{n+1}) - y_n (\bar{C}_{n+1,p} j_n + \bar{D}_{n+1,p} j_{n+1})$$

$$F(x) = \boxed{-\frac{\bar{D}_{n+1,p}}{x^2}} \quad (1-K)$$

h) $G(x) = j_{n+1} y_n^{(p)} - y_{n+1} j_n^{(p)}$

$$G(x) = j_{n+1} (C_{n,p} y_n + D_{n,p} y_{n+1}) - y_{n+1} (C_{n,p} j_n + D_{n,p} j_{n+1})$$

$$G(x) = \boxed{\frac{C_{n,p}}{x^2}} \quad (1-L)$$

VIII-2 - Les fonctions de Legendre

2.1 - Polynômes de Legendre

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right) + n(n+1)y = 0 \quad -1 \leq x \leq +1 \quad (2-A)$$

n entier positif ou nul

La solution générale de (2-A) est :

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x) \quad (2-B)$$

où $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont deux solutions indépendantes de (2-A)

$P_n(x)$ est un polynôme de degré n (figure (2-A))

$Q_n(x)$ est une fonction ayant une singularité logarithmique pour $x = 1$ et $x = -1$
(figure (2-B))

$g_n(x)$ désignera toute combinaison linéaire de $P_n(x)$ et de $Q_n(x)$

2.2 - Relations de récurrence utilisées

a) Il est possible de calculer P_{n+1} connaissant P_n et P_{n-1}

$$\frac{(2n+1)x P_n - n P_{n-1}(x)}{n+1} = P_{n+1}(x) \quad (C1)$$

(2-C)

$$\frac{(2n+1)x Q_n - n Q_{n-1}(x)}{n+1} = Q_{n+1}(x) \quad (C2)$$

POLYNOME DE LEGENDRE

Tableau des premiers pôlynômes $P_n(z)$:

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = z$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (3 z^2 - 1)$$

$$P_3 = \frac{z}{2} (5 z^2 - 3)$$

$$P_4 = \frac{1}{8} (35 z^4 - 30 z^2 + 3)$$

$$P_5 = \frac{z}{8} (63 z^4 - 70 z^2 + 15)$$

$$P_6 = \frac{1}{16} (231 z^6 - 315 z^4 + 105 z^2 - 5)$$

$$P_7 = \frac{z}{16} (429 z^6 - 693 z^4 + 315 z^2 - 35)$$

Figure VIII.2.A

FONCTIONS DE LEGENDRE DE 2 ème ESPECE

Tableau des premières fonctions $Q_n(z)$ pour $-1 < z < 1$

$$Q_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z}$$

$$Q_1 = \frac{z}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} - 1$$

$$Q_2 = \frac{1}{4} (3z^2 - 1) \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} - \frac{3}{2} z$$

$$Q_3 = \frac{z}{4} (5z^2 - 3) \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{6} (15z^2 - 4)$$

$$Q_4 = \frac{1}{16} (35z^4 - 30z^2 + 3) \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} - \frac{5}{24} z (21z^2 - 11)$$

Figure VIII.2.B

$$b) \quad (x^2 - 1) \frac{dg_n}{dx} = n \left[x g_n(x) - g_{n-1}(x) \right] \quad (D1)$$

(2-D)

$$(x^2 - 1) \frac{dg_n}{dx} = (n+1) \left[g_{n+1}(x) - x g_n(x) \right] \quad (D2)$$

2.3 - Propriétés des fonctions $g_n(x)$

$$a) \quad \left| P_n(x) \right| \leq 1 \quad \text{pour} \quad |x| \leq 1$$

b) $P_n(x)$ a la parité de n ; $P_n(x)$ est paire pour n pair, impaire pour n impair (figure (2-C))

2.4 - Fonctions associées de Legendre

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad (2-E)$$

où :

- a) n entier positif ou nul
- b) m entier positif ou nul avec $0 \leq m \leq n$
- c) $-1 \leq x \leq +1$

La solution générale de (2-E) est :

$$y = C_1 P_n^m(x) + C_2 Q_n^m(x) \quad (2-F)$$

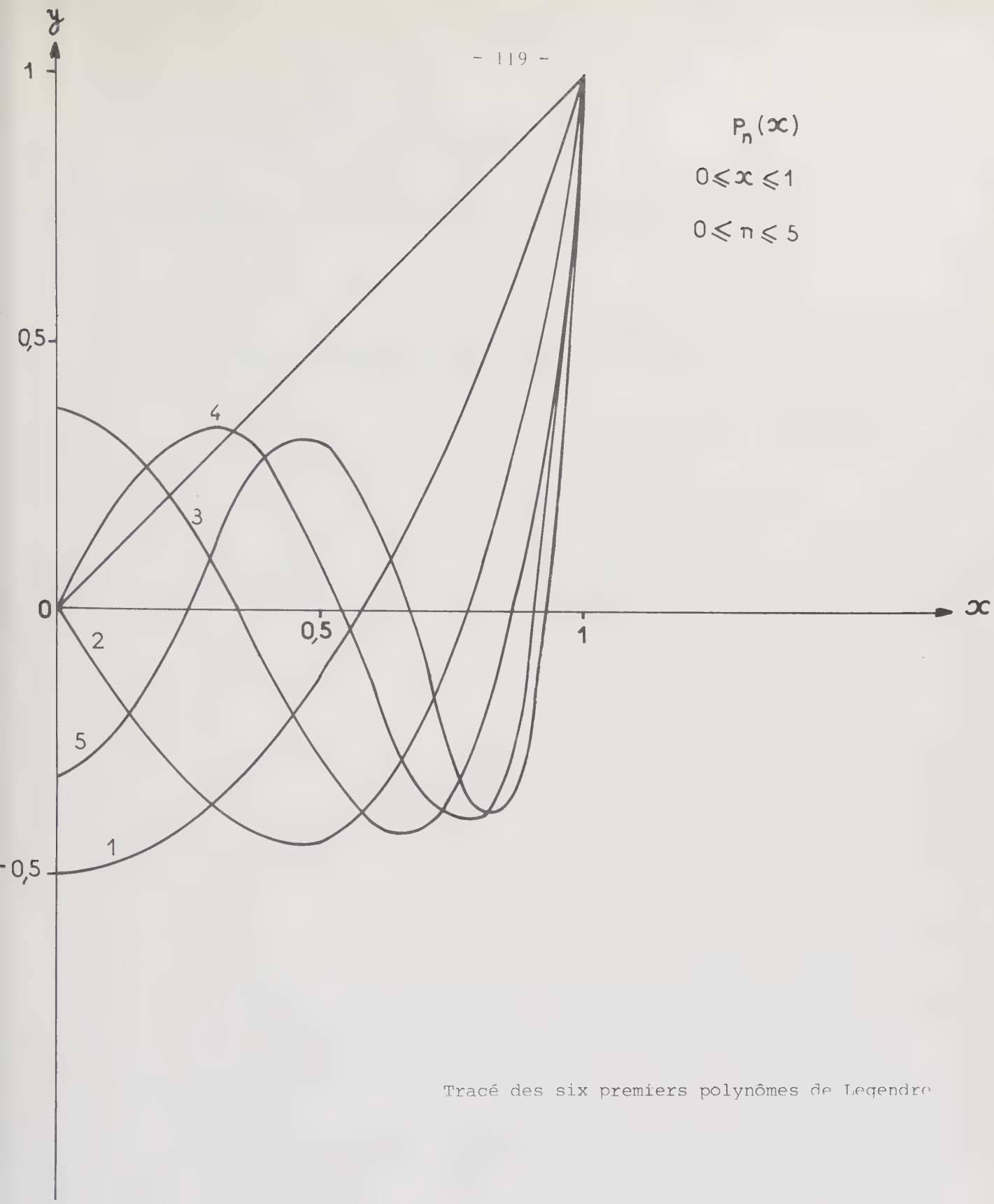
où :

- a) C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires
- b) $P_n^m(x)$ et $Q_n^m(x)$ sont des solutions particulières et indépendantes

de (2-E)

$P_n^m(x)$ est la fonction associée de Legendre de 1ere espèce

$Q_n^m(x)$ est la fonction associée de Legendre de 2ème espèce



Tracé des six premiers polynômes de Legendre

FONCTIONS DE LEGENDRE ASSOCIEES DE 1ere ESPECE

$$(m = 1)$$

$$P_n^1 = - \sqrt{1 - z^2} \quad \frac{d}{dz} P_n(z)$$

$$P_1^1 = - \sqrt{1 - z^2}$$

$$P_2^1 = - 3 \sqrt{1 - z^2} \quad z$$

$$P_3^1 = - \frac{3}{2} \sqrt{1 - z^2} \quad (5 z^2 - 1)$$

$$P_4^1 = - \frac{5}{2} \sqrt{1 - z^2} \quad z (7 z^2 - 3)$$

$$P_5^1 = - \frac{15}{8} \sqrt{1 - z^2} \quad (21 z^4 - 14 z^2 + 1)$$

$$P_6^1 = - \frac{21}{8} \sqrt{1 - z^2} \quad z (33 z^4 - 30 z^2 + 5)$$

$$P_7^1 = - \frac{7}{16} \sqrt{1 - z^2} \quad (429 z^6 - 495 z^4 + 135 z^2 - 5)$$

2.5 - Relations de récurrences utilisées

$$P_n^{m+1}(x) = \frac{2m x}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m(x) + \left[(m-1)m - n(n+1) \right] P_n^{m-1}(x) = 0 \quad (2-G)$$

2.6 - Principales propriétés

a) $P_n^m(x)$ est bornée et Q_n^m a une singularité logarithmique

pour $x = 1$ et $x = -1$ (voir figure (2-D))

$$b) P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m} (x^2-1)^n}{dx^{n+m}} = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (2-H)$$

CHAPITRE IX - ANNEXE II

Résolution de l'Equation de Helmholtz
en coordonnées sphériques

Les principales formules d'Analyse Vectorielle (essentiellement utilisées dans les chapitres I et II) sont rappelées dans le sous chapitre IX.1

La résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques fait l'objet du sous-chapitre IX.2. Les références sont (9).

IX.1 - Rappel des formules de l'Analyse vectorielle

1.1 - Gradient

$$\vec{\text{grad}} (f \cdot g) = f \cdot \vec{\text{grad}} (g) + g \cdot \vec{\text{grad}} (f) \quad 1-A$$

1.2 - Divergence

$$a) \operatorname{div} (f \cdot \vec{V}) = f \cdot \operatorname{div} \vec{V} + (\vec{\text{grad}} f) \cdot \vec{V} \quad 1-B$$

$$b) \operatorname{div} (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \vec{\text{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \vec{\text{rot}} \vec{V}_2 \quad 1-C$$

$$c) \operatorname{div} (\vec{\text{rot}} \vec{V}) = 0 \quad 1-D$$

1.3 - Rotationnel

$$a) \vec{\text{rot}} (f \cdot \vec{V}) = f \cdot \vec{\text{rot}} \vec{V} + (\vec{\text{grad}} f) \wedge \vec{V} \quad 1-E$$

$$b) \vec{\text{rot}} (\vec{\text{grad}} f) = \vec{0} \quad 1-F$$

1.4 - Laplacien

$$\Delta f = \operatorname{div} (\vec{\text{grad}} f) \quad 1-G$$

1.5 - Laplacien vecteur

$$a) \vec{\Delta} (\vec{\text{grad}} f) = \vec{\text{grad}} (\Delta f) \quad 1-H$$

$$b) \vec{\Delta} (\operatorname{div} \vec{V}) = \operatorname{div} (\vec{\Delta} \vec{V}) \quad 1-I$$

$$c) \vec{\Delta} (\vec{\text{rot}} \vec{V}) = \vec{\text{rot}} (\vec{\Delta} \vec{V}) \quad 1-J$$

$$d) \vec{\Delta} (\vec{\text{grad}} f \wedge \vec{\Omega}) = (\vec{\text{grad}} \Delta f) \wedge \vec{\Omega} \quad 1-K$$

$\vec{\Omega}$ étant un vecteur constant.

IX.2 - Résolution de l'équation de Helmholtz vectorielle en coordonnées sphériques

IX.2.1 - Position du problème

Soit l'équation de HELMOLTZ :

$$\Delta \vec{H} + \beta^2 \vec{H} = \vec{0} \quad (2-A)$$

On cherche une solution $\vec{H}$ sous la forme :

$$\vec{H} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{B}$$

Soit $\Sigma(a,b)$ un réservoir sphérique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , de centre O .

Oxyz est un repère orthonormé direct de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Soit $P \in \Sigma$ et P_1 la projection orthogonale de P sur le plan xOy.

On fait le choix du système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) suivant :

- a) $r = \|\vec{OP}\|$
- b) $\theta = (\vec{k}, \vec{OP}) \quad 0 < \theta < \pi$
- c) $\phi = (\vec{i}, \vec{OP}_1) \quad 0 < \phi < 2\pi$

Les vecteurs unitaires correspondants $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ sont tels que :

$$a) \quad \vec{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} ; \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} ; \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \phi}$$

$$b) \quad h_r = 1 ; \quad h_\theta = r ; \quad h_\phi = r \sin \theta$$

IX.2.2 - Recherche d'une "solution rotationnelle"

Soit f une fonction quelconque de (r, θ, ϕ) de classe C^∞ .

On définit $\vec{M}$ par :

$$\vec{M} = \text{rot } (f \vec{e}_r) \quad (2-B)$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{M} = \frac{\vec{e}_\theta}{h_r h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (h_r f) - \frac{\vec{e}_\phi}{h_r h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_r f)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\vec{e}_\phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = M_\theta \vec{e}_\theta + M_\phi \vec{e}_\phi$$

$\vec{M}$ appartient au plan (M) tangent à $\Sigma(a,b)$ en P

Pour que $\vec{M}$ soit solution de l'équation (2-A), il faut et il suffit que :

$$\Delta \vec{M} = -\beta^2 \vec{M}$$

or $\Delta \vec{M} = \text{grad} (\text{div } \vec{M}) - \text{rot rot } \vec{M}$ et $\text{div } \vec{M} = 0$

$\vec{M}$ solution de 2-A

$$\text{et} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot rot } \vec{M} = \beta^2 \vec{M} \quad (2-C)$$

$\vec{M}$ rotationnel

a) Calcul de f et de $\vec{M}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{M} &= \frac{\vec{e}_r}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (M_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r M_\theta) \right] \\ &+ \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (M_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta M_\phi) \right] \\ &+ \frac{\vec{e}_\phi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r M_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (M_r) \right] \end{aligned}$$

Si $\text{rot } \vec{M} = \beta^2 f \vec{e}_r + \text{grad } U$ alors :

$$\text{rot rot } \vec{M} = \beta^2 \text{rot } f \vec{e}_r + \vec{0} = \beta^2 \vec{M} \text{ et 2-C est vérifié.}$$

$$\text{rot } \vec{M} = \beta^2 f \vec{e}_r + \text{grad } U \Rightarrow \text{rot rot } \vec{M} = \beta^2 \vec{M} \quad (2-D)$$

On remarque que si :

a) ψ est solution de $\Delta\psi + \beta^2 \psi = 0$

b) $f = r\psi$

alors :

$$\vec{\text{rot}} \vec{M} = \vec{\text{grad}} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\psi) + \beta^2 f \vec{e}_r$$

d'où : $U = \frac{\partial}{\partial r} (r\psi)$ à une constante près.

En résumé, si :

a) ψ est solution de $\Delta\psi + \beta^2 \psi = 0$

b) $\vec{M} = \vec{\text{rot}} (r \psi \vec{e}_r)$ (2-E)

alors $\vec{M}$ est solution de l'équation de Helmholtz vectorielle (2-A)

Remarque

$$\vec{M} = \vec{\text{rot}} (r\psi \vec{e}_r) = \vec{\text{grad}} (r\psi) \wedge \vec{e}_r \quad (2-F)$$

b) Recherche d'une deuxième solution rotationnelle $\vec{N}$

Soit χ une solution de $\Delta\chi + \beta^2 \chi = 0$

et $\vec{N} = \frac{1}{\beta} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} (r \chi \vec{e}_r)$ (2-G)

$\vec{N}$ est un rotationnel.

D'après ce qui précède (2-F) :

$$\vec{N} = \frac{1}{\beta} \vec{\text{grad}} \frac{\partial}{\partial r} (r\chi) + \beta r \chi \vec{e}_r \quad (2-H)$$

(2-D) entraîne que $\vec{N}$ est solution de (1-A)

Remarque

$$\vec{\text{rot}} \vec{N} = \beta \vec{\text{rot}} (r\chi \vec{e}_r)$$

C) $\vec{M}$ et $\vec{N}$ indépendants

Si $\chi = \psi$ alors (2-F) et (2-H) montrent que :

$$\vec{N} = \frac{1}{\beta} \vec{\text{rot}} \vec{M}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{\beta} \vec{\text{rot}} \vec{N} \quad (2-I)$$

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = 0$$

$\vec{M}$ et $\vec{N}$ sont linéairement indépendants.

IX.2.3 - Recherche d'une solution "gradient"

$$\vec{L} = \text{grad } \phi \Rightarrow \Delta \vec{L} = \text{grad } \text{div } \vec{L} - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{L} = \text{grad } \Delta \phi - \Delta \vec{L} + \beta^2 \vec{L} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\text{grad } (\Delta \phi + \beta^2 \phi) = \vec{0} \quad (2-J)$$

$$\vec{L} = \text{grad } \phi$$

$$\text{On peut prendre } \phi \text{ solution de } \Delta \phi + \beta^2 \phi = 0 \quad (2-K)$$

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = 0 \text{ et } \vec{L} \wedge \vec{N} \neq \vec{0}$$

Les trois vecteurs $\vec{L}$, $\vec{M}$, $\vec{N}$ sont indépendants et constituent une base des solutions de 2-A.

IX.2.4 - Conclusion

Si ϕ, ψ, χ sont trois solutions indépendantes de l'équation de Helmholtz scalaire :

$$\Delta\phi + \beta^2\phi = 0$$

$$\Delta\psi + \beta^2\psi = 0$$

$$\Delta\chi + \beta^2\chi = 0$$

La solution générale de l'équation vectorielle :

$$\Delta \vec{H} + \beta^2 \vec{H} = \vec{0} \quad \text{est}$$

$$\vec{H} = a' \vec{\text{grad}}\phi + b' \vec{M} + c' \vec{N}$$

où

a) a', b', c' sont des constantes arbitraires.

$$b) \quad \vec{M} = \vec{\text{rot}} (r\psi \vec{e}_r) = \left[\vec{\text{grad}} (r\psi) \wedge \vec{e}_r \right]$$

$$c) \quad \vec{N} = \frac{1}{\beta} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} (r\chi \vec{e}_r)$$

X - BIBLIOGRAPHIE

- 1- BAKER : Journal of the acoustical Society of America (1961)
Volume 33 - Number 12 - Page 1749-1758
- 2- M. BORG - Y. AYANT : Fonctions spéciales (1971)
Dunod Université Paris - page 63-115
- 3- W.W BELL : Fonctions spéciales à l'usage des chercheurs et des
Ingénieurs (1971)
Dunod - Paris page 42-155
- 4- CAMBOU - MARTI - WIELGOSZ: Contribution à l'Etude des réservoirs sphériques (1973)
Annales de l'E N S M page 28-39
- 5- COURBON : Vibrations radiales d'une enveloppe sphérique (1971)
Annales Ponts et Chaussées - N° 11
- 6- W. FLUGGE : Statique et dynamique des coques (1960)
Editions Eyrolles - Paris
- 7- A.E.H LOVE : A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity (1944)
Publications - New York page 278-287
- 8- J. MANDEL : Cours de Mécanique des Milieux Continus (1966)
Gauthier - Villars - Paris
- 9- M. MORSE - H. FESHBACH : Methods of Theoretical Physics (1953)
Mac Crow-Hill Book Company - New York
Tome II page 1759-1767 ; Tome I page 52-54
- 10- P. NAGHDI - A. KALNINS : On Vibration of elastic spherical Shells (1962)
Journal of Applied Mechanics page 65-69
- 11- G. PETIAU : La Théorie des fonctions de Bessel (1955)
C N R S

- 12- L. ROBIN : Fonctions Sphériques de Legendre et fonctions
sphéroïdales (1953)
Gauthiers - Villars Paris 3 tomes
- 13- A. SHAH - S. DATTA : Three dimensional and Shell Theory.
Analysis of Elastic waves in a Hollow sphere (1969)
Journal of Applied Mechanics page 431-435
- 14- S. TIMOSHENKO : Theory of Plates and Shells
Mac Crow Hill Book Company (1959)
- 15- WATSON G.N. : A Treatise of the theory of Bessel Functions
Cambridge University Press, Londres (1931)
- 16- WIELGOSZ : Détermination des fréquences et formes propres
de réservoirs sphériques minces et épais (1973)
D.E.A Nantes.

